

# **ALGEBRA 3**

- 6 CFU -

prof. **Fabio Gavarini**

## **1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI**

Anelli, morfismi tra anelli - ideali, quozienti - Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo - anelli ridotti, domini, campi - ideali primi, ideali massimali - anelli locali, anelli semilocali - operazioni sugli ideali - prodotto diretto - Teorema Cinese del Resto - estensione e contrazione di ideali tramite un morfismo

## **2 - MODULI su un ANELLO**

Moduli su anelli, rappresentazioni di anelli; morfismi tra moduli - sottomoduli, quozienti - Teorema Fondamentale di Omomorfismo - operazioni sui sottomoduli - Teoremi di Isomorfismo - torsione - prodotto diretto e somma diretta di moduli - moduli ciclici

Moduli liberi, basi - esistenza di basi per spazi vettoriali - equicardinalità di basi di uno spazio vettoriale: dimensione di uno spazio vettoriale - equicardinalità di basi di un modulo libero: rango di un modulo libero - il Lemma di Nakayama

Dualità per moduli su un anello - il biduale di un modulo; il morfismo canonico da un modulo al suo biduale, proprietà aggiuntive per spazi vettoriali

Prodotto (multi)tensoriale di moduli - restrizione ed estensione di scalari

Anelli di frazioni - proprietà universale degli anelli di frazioni - moduli di frazioni; funtorialità - moduli di frazioni vs. estensione di scalari e vs. prodotto tensoriale

## **3 - ALGEBRE su un ANELLO**

Algebre, morfismi tra algebre; caso associativo, caso commutativo, caso di Lie - algebra di Lie associata a un'algebra associativa - prodotto tensoriale di algebre commutative - algebra gruppoide di un grupoide e sua proprietà universale; casi speciali per semi-gruppi/monoidi/gruppi) - algebra tensoriale di un modulo e sua proprietà universale - algebra involuante universale di un'algebra di Lie e sua proprietà universale

## **4 - INTRODUZIONE alla TEORIA delle CATEGORIE**

Categorie: definizione, esempi. Costruzioni fondamentali: prodotti, quozienti, categoria delle frecce, categorie "fetta" o "co-fetta", categoria duale

Functori; (bi)functori *Hom*; categoria delle categorie; trasformazioni naturali, categoria dei functori - isomorfismi naturali, quasi-isomorfismi, equivalenze tra categorie - funtore di Yoneda; Lemma di Yoneda - functori rappresentabili

Oggetti finali ed iniziali; prodotto e coprodotto - diagrammi, coni e coconi; limiti e colimiti; oggetti finali, oggetti iniziali e prodotti come limiti; prodotti fibrati e coprodotti fibrati

Aggiunzione tra functori; composizione di aggiunzioni, la categoria delle categorie con aggiunzioni - esempi: aggiunzione associata ad un isomorfismo naturale; restrizione/estensione di scalari (*reciprocità di Frobenius*) per moduli su un anello; aggiunzione tra prodotto tensoriale e funtore *Hom*; aggiunzioni tra spazi topologici e insiemi; aggiunzione tra gruppidi e algebre; aggiunzione tra *A*-moduli e algebre associative unitarie; aggiunzione tra *A*-algebre di Lie e *A*-algebre associative unitarie

---