ESERCIZI SUI GRUPPI

— * —

1 — Sia G un gruppo di ordine $|G| = 992$. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 31-sottogruppo di Sylow normale.

2 — Sia G un gruppo di ordine $|G| = 98$. Dimostrare che G è abeliano se e soltanto se G contiene un unico elemento di ordine 2.

3 — Determinare le diverse possibili strutture di un gruppo G (in altre parole, spiegare come possa essere fatto un tale gruppo) di ordine $|G| = 63$.

4 — Determinare le diverse possibili strutture di un gruppo G di ordine $|G| = 56$.

5 — Determinare le diverse possibili strutture di un gruppo G di ordine $|G| = pq$ dove p e q siano numeri primi.

6 — Dimostrare che ogni gruppo G di ordine $|G| = 2021$ è ciclico.

7 — Dimostrare che ogni gruppo G di ordine $|G| = 245$ è abeliano.

8 — Sia $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$ il gruppo speciale lineare delle matrici quadrate di taglia 2 con determinante 1.

(a) Determinare l'ordine del gruppo G .

(b) Dimostrare che il 2-sottogruppo di Sylow S_2 di G è normale.

(c) Determinare se il 2-sottogruppo di Sylow S_2 di G sia isomorfo al gruppo diedrale su quattro elementi D_4 oppure al gruppo dei quaternioni Q .

9 — Sia G un gruppo di ordine 168 che sia *semplice*, cioè privo di sottogruppi normali non banali. Determinare il numero degli elementi di G di ordine 7.

10 — $\diamond$ Sia G un gruppo semplice, cioè privo di sottogruppi normali non banali, sia p un primo che divida l'ordine di G , con G non isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, e sia ν_p il numero di p -sottogruppi di Sylow di G . Dimostrare che l'ordine di G divide $\nu_p!$.

11 — Sfruttando l'esercizio **10** qui sopra, dimostrare che se un gruppo G ha ordine $|G| = 10000$, allora non è semplice.

12 — Determinare, a meno di isomorfismi, tutti i possibili gruppi *abeliani* G di ordine $|G| = 12600$, specificandone un esempio esplicito per ciascuna classe di isomorfismo.

13 — Considerato il gruppo abeliano $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_{70} \times \mathbb{Z}_{20}$, si determinino:

(a) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 1° Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per invarianti*”);

(b) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 2° Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*”).

14 — Determinare la fattorizzazione come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 2° Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*”) per il gruppo additivo $\mathbb{Z}_{2156000}$.

15 — $\diamond$ Determinare la fattorizzazione come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 2° Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*”) per il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{1925})$ degli elementi invertibili nell'anello commutativo unitario $(\mathbb{Z}_{1925}; +, \cdot)$.