ESERCIZI SU TEORIA DI GALOIS

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Determinare quali delle seguenti estensioni siano normali:

(a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(i \cdot \sqrt[4]{7}\,\big)$;

(b) $\mathbb{Q}\big(i \cdot \sqrt[4]{5}\,\big) \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{7}, i \cdot \sqrt[4]{5}\,\big)$;

(c) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\zeta_5\,, \sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}\,\big)$, dove ζ_5 è una radice quinta primitiva dell'unità.

2 — Dimostrare che ogni estensione di campi, *la cui caratteristica sia diversa da 2*, di grado 2 è normale.

3 — Per un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, sia $\mathbb{Q}_f$ il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$. Calcolare il grado $\big[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}\big]$ nei seguenti casi:

(a) $f(x) := x^3 - 1$;

(b) $f(x) := x^3 - 3$;

(c) $f(x) := x^4 - 2$;

(d) $f(x) := x^{10} - 1$;

(e) $f(x) := x^2 - 841$.

4 — Dato il polinomio $f(x) := 2\,x^4 - x^3 - 4\,x + 2$, determinare il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$.

5 — Sia $\mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi, e sia $\mathbb{K} := \mathbb{F}_5(\alpha)$ un'estensione semplice di $\mathbb{F}_5$ generata da un elemento α tale che $\alpha^4 = 2\,\alpha + 1$.

(a) Calcolare il grado $\big[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5\big]$.

(b) Calcolare quante radici abbia in $\mathbb{K}$ il polinomio $f(x) := x^2 + x + 2$.

(c) Calcolare il numero di campi $\mathbb{E}$ tali che $\mathbb{F}_5 \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}$.

6 — Sia $\mathbb{F}_3$ il campo con 3 elementi, e sia $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento del polinomio $x^{11} - 1$ su $\mathbb{F}_3$.

(a) Calcolare il grado $\big[\mathbb{K} : \mathbb{F}_3\big]$ dell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{F}_3$.

(b) Descrivere il gruppo di Galois $G\big(\mathbb{K}/\mathbb{F}_3\big)$ dell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{F}_3$.

7 — Descrivere il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) := x^3 - 10 \in \mathbb{Q}[x]$.

8 — Descrivere il gruppo di Galois del polinomio $f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x] \; \big(\subseteq \mathbb{R}[x]\big)$ sul campo $\mathbb{R}$ e sul campo $\mathbb{Q}$.

9 — Sia $\mathbb{Q}_f$ il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $f(x) := x^3 - x^2 + 4\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Determinare il grado $\big[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}\big]$ dell'estensione $\mathbb{Q}_f \big/ \mathbb{Q}$.

(b) Determinare esplicitamente una base di $\mathbb{Q}_f$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare esplicitamente un elemento primitivo dell'estensione $\mathbb{Q}_f \big/ \mathbb{Q}$.

(d) Descrivere esplicitamente il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q}_f \big/ \mathbb{Q}$.

10 — Descrivere il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) := x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

11 — Determinare il campo di spezzamento ed il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) := x^4 - 4\,x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

12 — Sia $\mathbb{A}_{81}$ l'anello quoziente $\mathbb{A}_{81} := \mathbb{Z}_3[x] \Big/ \big(x^4 + 2\,x + 2\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{A}_{81}$ è un campo, e ha cardinalità 81.

(b) Determinare un generatore del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{A}_{81}^* \,;\, \cdot\big)$ del campo $\mathbb{A}_{81}$, dove $\mathbb{A}_{81}^* := \mathbb{A}_{81} \setminus \{0\}$.

(c) Descrivere esplicitamente — in termini di una base di $\mathbb{A}_{81}$ sul suo sottocampo fondamentale — l'unico sottocampo di $\mathbb{A}_{81}$ che abbia cardinalità 9.