ESERCIZI SU FATTORIZZAZIONE

— $*$ —

1 — Dimostrare che ogni dominio *finito* D è un campo.

2 — Si consideri il dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ e in esso l'insieme

$$\mathcal{T} \;:=\; \big\{\, \zeta \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] \,\big|\, N(\zeta) = 9 \,\big\}$$

dove N è la norma in $\mathbb{C}$, che per ogni $\zeta = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ vale ovviamente $N(\zeta) = N\big(a + b\sqrt{-5}\,\big) = a^2 + 5\,b^2$. Dimostrare che:

(a) $\mathcal{T} \;:=\; \big\{\, 3\,,\, -3\,,\, \big(2+\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2+\sqrt{-5}\,\big) \,\big\}$;

(b) ogni elemento di $\mathcal{T}$ è irriducibile ma *non* è primo;

(c) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è un dominio atomico;

(d) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio a fattorizzazione unica;

(e) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio di Bézout;

(f) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio con M.C.D.

3 — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big] := \big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{-13} \,\big\}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un dominio di integrità.

(c) Determinare, se esiste, il $M.C.D.\big(7\,, \sqrt{-13}-1\big)$ in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$.

(d) Determinare, se esiste, il $M.C.D.\big(42\,, 5+5\sqrt{-13}\big)$ in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$.

(e) Determinare tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$.

(f) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un dominio a fattorizzazione unica.

(g) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un dominio euclideo.

(h) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un dominio a ideali principali.

(i) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\big]$ sia un dominio atomico.

4 — Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{13}\big] := \big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{13} \,\big\}$ è un dominio atomico ma non un dominio a fattorizzazione unica. In particolare, si mostri esplicitamente che per un opportuno elemento di $\mathbb{Z}\big[\sqrt{13}\big]$ esistono due fattorizzazioni in atomi (=irriducibili) *non* equivalenti.

5 — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-7}\,\big]$ il sottoanello di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{-7}\,\big] \;:=\; \big\{\, z_0 + z_1\sqrt{-7} \,\big|\, z_0, z_1 \in \mathbb{Z} \,\big\}$$

Dimostrare che esistono in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-7}\,\big]$ degli elementi *irriducibili* ma *non primi*.

6 — *Regola di Ruffini:* Sia D un dominio a fattorizzazione unica, sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti, e sia $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in D[x] \setminus \{0\}$ un polinomio non nullo di grado n, e sia $q := r/s \in Q(D)$ un razionale con $r, s \in D$ tali che $M.C.D.(r,s) = 1$. Dimostrare che se q è radice di $f(x)$, cioè $f(q) = 0$, allora r divide a_0 e s divide a_n in D.

7 — *Criterio di Riduzione:* Siano D ed E due domini unitari, sia $\sigma : D \longrightarrow E$ un morfismo di anelli e $\sigma_x : D[x] \longrightarrow E[x]$ $\Big(f(x) = \sum_n a_n x^n \mapsto \sigma_x\big(f(x)\big) := \sum_n \sigma(a_n) x^n \Big)$ il corrispondente morfismo tra gli anelli di polinomi associati. Dato $f = f(x) \in D[x]$, dimostrare che se $\partial\big(\sigma_x(f)\big) = \partial(f)$ e $\sigma_x(f)$ non ha in $E[x]$ una fattorizzazione in prodotto di polinomi di grado strettamente più basso del suo, allora lo stesso vale per f in $D[x]$.

8 — Dimostrare che il polinomio $f(x) := 5x^3 - 4x^2 + 13x + 17 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$.

9 — Determinare se il polinomio $f(x,y) := x^2 + 3xy + y^2 + 3x - 1 \in \mathbb{Z}[x,y]$ sia riducibile o irriducibile nell'anello $\mathbb{Z}[x,y]$. Nel primo caso, si determini una fattorizzazione di $f(x,y)$ in irriducibili, se è possibile, oppure si spieghi perché non è possibile; nel secondo caso, si spieghi perché $f(x,y)$ sia irriducibile.

10 — Fattorizzare in irriducibili il polinomio $f(x) := 15x^4 + 55x^3 - 50x - 20 \in \mathbb{Q}[x]$.

11 — Fattorizzare in irriducibili ciascuno dei seguenti interi di Gauss:

$$A := 114 \quad , \qquad B := -35 + 75\,i \quad , \qquad C := 260 - 130\,i$$

12 — Sia D un dominio con MCD. Dimostrare che il MCD gode della "proprietà associativa", nel senso che per ogni $a_1,\, a_2,\, a_3 \in D^* := D \setminus \{0_D\}$ si ha

$$MCD\big(MCD(a_1, a_2), a_3\big) \sim MCD\big(a_1, MCD(a_2, a_3)\big)$$

così che, in generale, resta ben definito (a meno di invertibili) il $MCD(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

13 — Dimostrare che in un dominio di Bézout ogni ideale che sia finitamente generato è necessariamente principale.