ESERCIZI SU CAMPI E ESTENSIONI

— ∗ —

1 — Sia A l'anello quoziente

$$A := \mathbb{Z}[x,y,z] \Big/ \big(x - 2\,y + 3 \,,\, y + 5 \,,\, z^2 - 3\,y\,z - 6 \,,\, x + 2 \big) \quad .$$

Dimostrare che A è un campo, e precisarne la caratteristica.

2 — Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_5[x] \Big/ \big(x^3 - x^2 + x + 1\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{F}$ è un campo.

(b) Calcolare la caratteristica e la cardinalità di $\mathbb{F}$.

(c) Determinare esplicitamente un generatore del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{F}^* \,;\, \cdot\big)$ del campo $\mathbb{F}$, dove $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

3 — Siano p_1, p_2 due primi distinti in $\mathbb{N}_+$. Dimostrare che:

(a) l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1}\,,\sqrt{p_2}\big)$ ha grado 4 ;

(b) $\mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1}\,,\sqrt{p_2}\big) = \mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\big)$, cioè $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$ è un elemento primitivo per l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1}\,,\sqrt{p_2}\big)$.

4 — Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{K} := \mathbb{Q}[x] \Big/ \big(x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 3\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.

(b) Posto $\alpha := \overline{x} \in \mathbb{K}$, calcolare $(1-\alpha)^{-1}$ esprimendolo come combinazione lineare di 1, α e α^2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

5 — Siano α e β i due numeri reali

$$\alpha := \frac{2\,e - \sqrt{5}}{e^3 + 4\sqrt[3]{2} + 7} \quad , \qquad \beta := 4\sqrt[3]{7} - \sqrt{5}$$

Il numero α , risp. β , è algebrico su $\mathbb{Q}$? In caso negativo si spieghi perché, in caso affermativo si determini il polinomio minimo su Q del numero in esame.

N.B.: si assume *noto* che e è *trascendente* su $\mathbb{Q}$.

6 — Dimostrare che $\alpha := 1 + \sqrt[3]{2}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, e calcolarne il polinomio minimo.

7 — Sia $K\big/F$ un'estensione di campi di grado finito $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $p(x) \in F[x] \setminus F$ un polinomio *irriducibile* di grado m, con $\text{M.C.D.}(m,n) = 1$.

Dimostrare che $p(x)$ è irriducibile (anche) in $K[x]$.

8 *(applicazione dell'esercizio 7)* — Sia $K\big/F$ un'estensione di campi, siano $\alpha, \beta \in K$ due elementi di K che siano algebrici su F, con $a := \big[F(\alpha) : F\big]$ e $b := \big[F(\beta) : F\big]$ tali che $\text{M.C.D.}(a,b) = 1$. Dimostrare che $\big[F(\alpha,\beta) : F\big] = \big[F(\alpha) : F\big] \cdot \big[F(\beta) : F\big]$.

9 *(applicazione dell'esercizio 7)* — Dimostrare che il polinomio $f(x) := x^2 + x + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\,\big)[x]$.

10 — Sia $F(\alpha)\big/F$ un'estensione di campi semplice (algebrica) di grado 5, generata — su F — dall'elemento primitivo α. Dimostrare che $F\big(\alpha^2\big) = F(\alpha)$.

11 — Determinare un elemento primitivo, e il suo polinomio minimo, per l'estensione di campi $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5}\,\big)\big/\mathbb{Q}$.

12 — Si stabilisca se esistano, e in caso affermativo se ne costruisca un esempio, campi finiti delle seguenti cardinalità: 18, 16, 27, 28, 29, 31, 239.

13 — Sia $\mathbb{F}$ un campo *finito*. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esiste in $\mathbb{F}[x]$ un polinomio irriducibile di grado n.

14 — Sia $\mathbb{F}_2$ il campo con 2 elementi, e si considerino in $\mathbb{F}_2[x]$ i due polinomi

$$h(x) := x^3 + x + 1 \quad , \qquad k(x) := x^3 + x^2 + 1$$

(a) Dimostrare che $h(x)$ e $k(x)$ sono irriducibili.

(b) Determinare esplicitamente un isomorfismo da $\mathbb{F}_2[x]\big/\big(h(x)\big)$ a $\mathbb{F}_2[x]\big/\big(k(x)\big)$.

15 — Siano $\mathbb{F}_2$ e $\mathbb{F}_{32}$ rispettivamente il campo con 2 elementi e quello con 32 elementi.

(a) Dimostrare che ogni elemento $x \in \mathbb{F}_{32} \setminus \mathbb{F}_2$ è un generatore del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{F}_{32}\,;\,\cdot\big)$ del campo $\mathbb{F}_{32}$.

(b) Determinare il numero di polinomi $f(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ tali che l'anello quoziente $\mathbb{F}_2[x]\big/\big(f(x)\big)$ sia isomorfo a $\mathbb{F}_{32}$.