

Corso di Laurea in **Matematica** - a.a. 2007/8

programma di **ALGEBRA 2** - prof. **Fabio Gavarini**

1 - RICHIAMI SU INSIEMI, RELAZIONI, APPLICAZIONI

Relazioni, equivalenze, partizioni. Insiemi quoziente. Applicazioni. Teorema Fondamentale delle Applicazioni. Relazioni compatibili in un insieme con operazioni; (omo)morfismi.

2 - TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

Gruppi. Sottogruppi. Centro di un gruppo. Prodotto di sottogruppi in un gruppo. Ordine di un elemento. Equivalenze associate ad un sottogruppo; classi laterali. Teorema di Lagrange per i gruppi finiti. Sottogruppi normali. Gruppi quoziente.

(Omo)morfismi tra gruppi. Immagine e nucleo di un morfismo. Teorema Fondamentale di Omomorfismo per gruppi. Corrispondenza tra sottogruppi di un gruppo G e sottogruppi dell'immagine di un morfismo di gruppi con dominio G . Primo e Secondo Teorema di Isomorfismo per gruppi.

Endomorfismi e automorfismi di un gruppo. Automorfismi interni e coniugazione in un gruppo. Teorema di Cayley per i gruppi. Prodotto diretto o semidiretto di due gruppi; caso di più gruppi (cenni).

3 - GRUPPI DI PERMUTAZIONI

Il gruppo simmetrico $\mathcal{S}(X)$ delle permutazioni di un insieme X . Permutazioni pari e permutazioni dispari. Il sottogruppo alterno delle permutazioni pari.

Coniugazione nel gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ su n elementi. Classi coniugate in $\mathcal{S}_n$. Il gruppo diedrale D_n .

4 - AZIONI DI GRUPPI E RISULTATI STRUTTURALI

Azioni di un gruppo: G -insiemi. G -orbite e stabilizzatori. Azioni indotte. Azioni di un gruppo su sé stesso. Centralizzante di un elemento in un gruppo. Equazione delle classi. Teorema di Burnside. Teorema di Cauchy. p -gruppi. Sottogruppi di Sylow di un gruppo finito. Teoremi di Sylow.

5 - GRUPPI RISOLUBILI E GRUPPI ABELIANI FINITI

Sottogruppo derivato, serie derivata. Gruppi risolubili. Ogni p -gruppo (finito) è risolubile. Caratterizzazione dei Gruppi Risolubili tramite la serie derivata. $\mathcal{S}_n$ è risolubile se e soltanto se $n < 5$.

Gruppi abeliani. Classificazione dei gruppi abeliani finiti.

Il teorema di Lagrange si inverte per i gruppi finiti che siano p -gruppi o che siano abeliani.

Ogni sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo di un campo è ciclico.

6 - TEORIA GENERALE DEGLI ANELLI

Anelli. Sottoanelli. Anelli commutativi; domini; corpi; campi. Centro di un anello. La somma di sottoanelli in un anello. Equivalenze associate ad un sottoanello; classi laterali. Ideali (sinistri, destri,

bilateri). Anelli quoziente.

(Omo)morfismi tra anelli. Immagine e nucleo di un morfismo di anelli. Teorema Fondamentale di Omomorfismo per anelli. Corrispondenza tra sottoanelli di un anello R e sottoanelli dell'immagine di un morfismo di anelli con dominio R . Primo e Secondo Teorema di Isomorfismo per anelli.

Endomorfismi e automorfismi di un anello. Automorfismi interni e coniugazione in un anello unitario. Teorema di Cayley per gli anelli. Prodotto diretto di anelli; caso di più anelli (cenni).

7 - ANELLI COMMUTATIVI

Divisibilità, elementi invertibili, elementi associati, $M.C.D.$ e $m.c.m.$ Caratterizzazione dei campi in termini di ideali. Ideali primi e ideali massimali. Elementi irriducibili e elementi primi in un dominio. Campo dei quozienti di un dominio unitario. Caratteristica. Sottoanello fondamentale.

Domini euclidei (= D.E.). Esistenza dell'unità, del $M.C.D.$, e di identità di Bézout per il $M.C.D.$ in un D.E.: l'algoritmo euclideo. L'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss come esempio di D.E..

Anelli (o domini) a ideali principali (= A.(D.).I.P.). Esistenza di $M.C.D.$ e di identità di Bézout nei D.I.P. Ogni D.E. è un D.I.P.

Domini a fattorizzazione unica (=D.F.U.). Criterio perché un dominio sia un D.F.U. Ogni D.I.P. (in particolare, ogni D.E.) è un D.F.U. Esistenza di $M.C.D.$ e $m.c.m.$ in un D.F.U., e loro forma esplicita.

Polinomi a coefficienti in un D.F.U.: contenuto di un polinomio, polinomi primitivi. Lemma di Gauss. Se R è un D.F.U., allora $R[x]$ è un D.F.U.; quindi anche $R[x_1, \dots, x_n]$ è un D.F.U.

Criterio di Eisenstein per l'irriducibilità di un polinomio in una variabile a coefficienti in un D.F.U.

8 - TEORIA GENERALE DEI CAMPI

Estensioni di campi. Grado di un'estensione, moltiplicatività. Estensioni finite, estensioni infinite. Elementi algebrici, elementi trascendenti. Estensioni semplici, e loro forma esplicita. Polinomio minimo di un elemento algebrico. Teorema dell'Elemento Primitivo in caratteristica zero (solo enunciato, senza dimostrazione). Estensioni algebriche, estensioni trascendenti. Campi algebricamente chiusi. Chiusura algebrica di un campo: esistenza e unicità (solo enunciato, senza dimostrazione).

Campo di spezzamento di un polinomio: esistenza e unicità. Estensioni normali.

Derivazione formale dei polinomi; criterio del $M.C.D.(f, f')$ per l'esistenza di radici multiple di $f(x)$.

Campi finiti (= C.F.): Teorema di Struttura dei C.F., Teorema di Unicità per C.F., Teorema di Esistenza per C.F. Le estensioni tra campi finiti sono normali. Il gruppo moltiplicativo di un campo finito è ciclico. Teorema dell'Elemento Primitivo per C.F.

9 - TEORIA DI GALOIS

Monomorfismi di un'estensione algebrica nella sua chiusura algebrica. Gruppo di Galois di un'estensione algebrica; gruppo di Galois di un polinomio. Corrispondenze di Galois per un'estensione algebrica.

Caratterizzazioni della normalità per un'estensione finita in caratteristica zero. Estensioni di Galois. Teorema di Corrispondenza di Galois (per estensioni di Galois).

Esempi ed applicazioni della teoria di Galois. Radici dell'unità in un campo; polinomi ciclotomici. Estensioni ciclotomiche e loro gruppo di Galois. Polinomi risolvibili per radicali. Teorema di Abel-Ruffini (solo l'enunciato, senza dimostrazione). Teorema Fondamentale dell'Algebra.

=====