Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

ALGEBRA 2 - G.M. Piacentini Cattaneo- I. Damiani -

GRUPPI- AZIONI DI GRUPPI-

(1) (a) Determinare tutti i sottogruppi del gruppo dei quaternioni

$$\mathcal{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

con le regole

$$ij = k, \qquad jk = i, \qquad ki = j, \qquad ji- = k, \qquad ,kj = -i, \qquad ik = -j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

(b) Determinare le classi coniugate di $\mathcal{Q}$.

SOLUZIONE

(a) Le $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ci dicono che gli elementi i, j, k hanno ordine 4, e quindi anche i loro inversi $-i, -j, -k$. In definitiva, gli elementi di $\mathcal{Q}$ hannno i seguenti ordini:

$$1 \qquad \text{ordine } 1$$

$$-1 \qquad \text{ordine } 2$$

$$i, j, k, -i, -j, -k \qquad \text{ordine } 4$$

Gli ordini dei possibili sottogruppi propri di $\mathcal{Q}$ sono 1,2,4. C'è un solo stgr. di ordine 2, $\{id, -1\}$. Inoltre ci sono tre sottogruppi (ciclici) di ordine 4,

$$H_1 = \{1, -1, i, -i\}, \quad H_2 = \{1, -1, j, -j\}, \quad H_1 = \{1, -1, k, -k\}.$$

che si intersecano nell'unico sottogruppo di ordine 2.

(b) Le classi sono

$$\{id\}, \qquad \{-1\}, \qquad \{i, -i\}, \qquad \{j, -j\}, \qquad \{k, -k\}.$$

Infatti $C(i) = \{1, -1, i, -i\}$, $C(j) = \{1, -1, j, -j\}$, $C(k) = \{1, -1, k, -k\}$ da cui il numero di coniugati c_x dell'elemento x sono

$$c_i = \frac{8}{|C(i)|} = 2, \quad c_j = \frac{8}{|C(j)|} = 2, \quad c_k = \frac{8}{|C(k)|} = 2.$$

(2) Determinare il numero di anagrammi dela parola "MASSIMA".

SOLUZIONE.

MASSIMA $\in \mathcal{P}_7 = \{$parole di 7 lettere$\}$ e $\mathcal{S}_7$ opera su $\mathcal{P}_7$. Allora

$N =$ numero di anagrammi di MASSIMA $=$ cardinalità dell'orbita di MASSIMA

che è uguale a $\frac{|\mathcal{S}_7|}{St_{MASSIMA}}$.

Calcoliamo lo stabilizzatore di MASSIMA:

$$St_{MASSIMA} =$$

$$= \{\sigma \in \mathcal{S}_7 \mid \{\sigma(1), \sigma(6)\} = \{1,6\}, \quad \{\sigma(3), \sigma(4)\} = \{3,4\}, \quad \{\sigma(2), \sigma(7)\} = \{2,7\}\}.$$

da cui lo stabilizzatore è il sottogruppo di $\mathcal{S}_7$ generato da $(1,6), (3,4), (2,7)$, ossia

$$\{id, (1,6), (3,4), (2,7), (1,6)(3,4), (3,4)(2,7), (2,7)(1,6), (1,6)(3,4)(2,7)\}$$

e la sua cardinalità è 8. Quindi

$$N = \frac{7!}{8} = 630.$$

(3) Sia $G = \mathcal{S}_3$ il gruppo simmetrico su 3 elementi. Se $x = (1,2,3)$, provare che $C(x)$ coincide con il gruppo ciclico generato da x.

SOLUZIONE

Certamente $(1,2,3)$ commuta con se stesso e anche il suo inverso, quindi il sottogruppo generato da $(1,2,3)$ sta in $C(1,2,3)$. D'altra parte, $|C(1,2,3)|$ è tale che

$$c_{(1,2,3)} = \frac{\mathcal{S}_3}{|C(1,2,3)}$$

essendo $c_{(1,2,3)}$ il numero di coinugati di $(1,2,3)$, ossia $2 = \frac{6}{x}$ ossia $C(1,2,3)$ ha 3 elementi. Quindi

$$C(1,2,3) = \{id, (1,2,3), (1,3,2)\}.$$

(4) Chi è $C(x)$ nel caso in cui sia $G = \mathcal{S}_n$ e $x = (1,2,3,\ldots,n)$?

SOLUZIONE

Di sicuro $(1,2,\ldots,n)$ permuta con le sue potenze, ossia il sottogruppo generato da $(1,2,\ldots,n)$, che ha cardinalità n, è un sottogruppo di $C((1,2,\ldots n))$. Dico che in realtà il centralizzante $C(1,2,\ldots,n)$ coincide con tale sottogruppo. Infatti

$$c_{(1,2,\ldots,n)} = (n-1)! \qquad \text{e} \qquad c_{(1,2,\ldots,n)} = \frac{|\mathcal{S}_n|}{C((1,2,\ldots n))} = \frac{n!}{x}$$

da cui $x = n$.

(5) Sia G il gruppo $\mathcal{S}_3$. Determinare $N_G(H)$ se H è
   (a) il sottogruppo $\langle(1,2,3)\rangle$;
   (b) il sottogruppo $\langle(1,2)\rangle$.
   SOLUZIONE
   (a) $N_G(H) = \{g \in G \,|gHg^{-1} = H\}$. Nel nostro caso cerco le permutazioni σ di $\mathcal{S}_3$ tali che $\sigma h \sigma^{-1} \in H$ per ogni $h \in \langle(1,2,3)\rangle$. Si tratta dell'intero gruppo $\mathcal{S}_3$, dato che il sottogruppo $\langle(1,2,3)\rangle$ è un sottogruppo normale in $\mathcal{S}_3$.
   (b) In questo caso $N_G(H) = H$.

(6) Si faccia agire il gruppo $(\mathbb{Z},+)$ su $\mathbb{R}$ per traslazione, ossia ponendo

$$a * x := n + x, \qquad a \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$$

Provare che si tratta di un'azione. Determinare lo stabilizzatore di ogni elemento di $\mathbb{R}$. Decidere se l'azione è transitiva.
SOLUZIONE
E' un'azione, perché

$$0 * x = 0 + x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a+b) * x = (a+b) + x = a + (b+x) = a * (b * x)$$

Stabilizzatore $St_x = \{0\}$. L'orbita di un elemento $x \in \mathbb{R}$ è costituita da tutti i numeri del tipo $n+x$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$. Non si tratta quindi di un'azione transitiva, dato che numeri reali che non differiscono per un numero intero stanno in orbite diverse.

(7) Si faccia agire i gruppo $(\mathbb{Z},+)$ su $\mathbb{R}$ al modo seguente:

$$a * x := (-1)^a x.$$

Provare che si tratta di un'azione. Determinare lo stabilizzatore di un elemento x di $\mathbb{R}$. Determinare l'orbita di ogni elemento.
SOLUZIONE
E' un'azione. Stabilizzatore $St_x = 2\mathbb{Z}$. Orbita $\mathcal{O}(x) = \{\pm x\}$.

(8) Sia $X := \{$ lati di un cubo$\}$
Si consideri l'azione del gruppo $(\mathbb{Z}_4,+)$ su X ottenuta ruotando il cubo attorno alla perpendicolare a passante per i centri dei lati $ABCD$ e $FGHE$ dell'aangolo di $\frac{\pi}{2}$. Posto $r :=$ permutazione di X indotta da questa rotazione, l'azione in questione è

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathcal{S}_X$$

$$\varphi(m) = r^m.$$

Studiare questa azione (orbite, stabilizzatori, ecc.) e verificare il teorema di Burnside sul numero di orbite.

SOLUZIONE

Le orbite sono tre ,

$$\mathcal{O}_1 = \{AB, BC, CD, AD\}, \quad \mathcal{O}_2 = \{BF, CG, DH, AE\}, \quad \mathcal{O}_3 = \{EF, FG, GH, HE\}.$$

Controlliamo questo fatto con il teorema di Burnside.

$$X_{\bar{O}} = \{x \in X \mid r^0(x) = x\}$$

Chiaramente X_0 è costituita da tutti i lati, ossia $|X_0| = 12$. Per ogni altro elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_4$

$$X_{\bar{a}} = \{x \in X \mid r^a(x) = x\} = \emptyset$$

ossia $|X_{\bar{a}}| = 0$. In definitiva, il numero s di orbite è (in virtù del t. di Burnside)

$$s = \frac{1}{|\mathbb{Z}_4|} \sum_{\bar{a} \in \mathbb{Z}_4} |X_{\bar{a}}| = \frac{1}{4}(12 + 0 + 0 + 0 + 0) = 3.$$

Lo stabilizzatore di un qualunque elemento di X (cioè di qualunque lato) è il solo elemento $0 \in \mathbb{Z}_4$.

Dalla $|G| = |\mathcal{O}(x)| \cdot |St_x|$ si ricava la cardinalità di ogni orbita (come si era già visto già geometricamente)

$$|\mathbb{Z}_4| = 4 = |\mathcal{O}(x)| \cdot 1$$

ossia ogni orbita ha esattamente 4 elementi.

(9) Sia X la sfera unitaria di $\mathbb{R}_3$, sia G il gruppo ortogonale SO_3. Si ha un'azione naturale di SO_3 su X, dato che SO_3 conserva le distanze: una matrice $A \in S)_3$ manda un vettore unitario $x \in X$ nel vettore unitario Ax. Studiare questa azione.

SOLUZIONE

(a) L'orbita d un qualunque vettore $x \in X$ è l'intera sfera X. Infatti due qualunque elementi x e y di X individuano un piano e una opportuna rotazione di $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse per 0 perpendicolare al piano dei due vettori porta x in y. Ciò vuol dire che due qualunque elementi di X stanno nella stessa orbita. L'azione è quindi transitiva.

(b) Calcoliamo lo stabilizzatore del vettore $e_1 = (1, 0, 0)^T$ della base standard di $\mathbb{R}^3$. Se $A \in S0_3$ fissa e_1 (ossia se $A \in St_{e_1}$) allora

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica $a_{11} = 1, a_{21} = 0, a_{31} = 0, \;\; a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$ da cui, essendo $a_{11} = 1$ segue $a_{12} = a_{13} = 0$. La matrice A è quindi una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

con

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matrice appartenente a $S0_2$. Quindi lo stabilizzatore di e_1 è la copia standard di $S0_2$ dentro $S0_3$. Dato che punti appartenenti alla stessa orbita hanno stabilizzatori coniugati, possiamo concludere dicendo che lo stabilizzatore di un *qualunque* vettore unitario è un sottogruppo isomorfo a $S0_2$.