ESERCIZI DI ALGEBRA 2
10-10-2005

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi più complessi.

1 — Anelli (esempi)

1.1 — Siano $A_1 \, , \, \dots , \, A_n$ degli anelli. Nell'insieme prodotto cartesiano $A_1 \times \cdots A_n$, si considerino le operazioni

$$(a_1 \, , \, \dots \, , \, a_n) + (\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n) \, := \, (a_1 + \alpha_1 \, , \, \dots \, , a_n + \alpha_n)$$
$$(a_1 \, , \, \dots \, , a_n) \cdot (\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n) \, := \, (a_1 \cdot \alpha_1 \, , \, \dots \, , a_n \cdot \alpha_n)$$

per ogni $(a_1, \dots, a_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times A_n$. Si dimostri che $\big(A_1 \times A_n \, ; + \, , \, \cdot \big)$ è un anello. Si dimostri inoltre che tale anello e unitario — precisando quale sia la sua unità — se gli anelli $A_1 \, , \, \dots , \, A_n$ sono a loro volta unitari.

1.2 — Sia X un insieme, e sia $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Indicando con $\vartriangle$ l'operazione di differenza simmetrica tra elementi di $\mathcal{P}(X)$, cioè

$$Y \vartriangle Z \, := \, \big(Y \cup Z \big) \setminus \big(Y \cap Z \big) \qquad\qquad \forall \quad Y \, , \, Z \in \mathcal{P}(X)$$

si dimostri che $\big(\mathcal{P}(X) \, ; \vartriangle , \cap \big)$ è un anello commutativo e unitario, precisando quale ne sia l'unità. Si dimostri inoltre che, se $\big| X \big| > 1$, esistono in tale anello dei divisori di zero.

1.3 — Sia A un anello unitario, e sia $U(A)$ il sottoinsieme degli elementi invertibili di A, cioè

$$U(A) \, := \, \Big\{ a \in A \, \Big| \, \exists \, \alpha \in A : a \, \alpha = 1 = \alpha \, a \Big\} \quad .$$

Dimostrare che $U(A)$ è un gruppo, rispetto all'operazione ottenuta per restrizione ad $U(A)$ della moltiplicazione dell'anello A .

1.4 — Sia A un anello, e x un simbolo formale. Si definiscano

$$
\begin{aligned}
A[x] \; &:= \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\,,\; a_k \in A \;\; \forall\, k \right\} && \textit{(polinomi)} \\
A\big[x, x^{-1}\big] \; &:= \left\{ \sum_{k=-m}^{n} a_k\, x^k \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}\,,\; a_k \in A \;\; \forall\, k \right\} && \textit{(polinomi di Laurent)} \\
A[[x]] \; &:= \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k \;\middle|\; a_k \in A \;\; \forall\, k \right\} && \textit{(serie [formali])} \\
A((x)) \; &:= \left\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k\, x^k \;\middle|\; m \in \mathbb{N}\,,\; a_k \in A \;\; \forall\, k \right\} && \textit{(serie di Laurent)}
\end{aligned}
$$

In ciascuno di tali insiemi, si definiscano le operazioni

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_i a_i\, x^i \Big) + \Big(\sum_j \alpha_j\, x^j \Big) \; &:= \; \sum_k \big(a_k + \alpha_k \big)\, x^k \\
\Big(\sum_i a_i\, x^i \Big) \cdot \Big(\sum_j \alpha_j\, x^j \Big) \; &:= \; \sum_k \Big(\sum_{i+j=k} a_i\, \alpha_j \Big)\, x^k
\end{aligned}
$$

dove si deve intendere $a_i := 0$ oppure $\alpha_j := 0$ se l'indice i oppure j non compare esplicitamente tra quelli dell'elemento (polinomio, o serie, ecc.) in esame.

Si dimostri che:

(a) $A[x]\,,\; A\big[x, x^{-1}\big]\,,\; A[[x]]$ e $A((x))$ sono anelli rispetto alle suddette operazioni.

(b) Gli anelli in *(1)* sono commutativi se e soltanto se l'anello dei coefficienti A è commutativo.

(c) Se l'anello dei coefficienti A è unitario, allora gli anelli in *(1)* sono unitari (e si specifichi quale ne è l'elemento unità).

(d) Gli anelli in *(1)* sono privi di divisori di zero se e soltanto se l'anello dei coefficienti A è privo di divisori di zero.

(e) Valgono le seguenti relazioni (dove "$\leq$" significa "è sottoanello di"):

$$
A \leq A[x] \leq A\big[x, x^{-1}\big] \leq A((x)) \quad , \qquad A \leq A[x] \leq A[[x]] \leq A((x)) \quad .
$$

(f) Supponendo che A sia unitario, e denotando con $U(R)$ il sottoinsieme degli elementi invertibili di R — per ogni anello unitario R — si dimostri che

$$
U\big(A[x]\big) = U(A) \quad , \qquad U\big(A\big[x, x^{-1}\big]\big) = \left\{ a\, x^z \;\middle|\; a \in U(A)\,,\; z \in \mathbb{Z} \right\} \quad ,
$$

$$
U\big(A[[x]]\big) = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k \in A[[x]] \;\middle|\; a_0 \in U(A) \right\} \quad .
$$

$$
U\big(A((x))\big) = \left\{ \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k\, x^k \in A((x)) \;\middle|\; a_{-m} \in U(A) \right\} \quad .
$$

1.5 — Sia A un anello, e S un insieme. Nell'insieme A^S di tutte le applicazioni da S ad A, si definiscano operazioni $+$ e $\cdot$ come segue:

$$\big(f+g\big)(s) := f(s)+g(s)\,, \quad \big(f\cdot g\big)(s) := f(s)\cdot g(s) \quad \big(\forall\ s\in S\big) \qquad \forall\ f,g\in A^S\,.$$

Si dimostri che:

(a) A^S è un anello rispetto alle due operazioni suddette.

(b) Se A è unitario, allora A^S è unitario, precisando quale sia la sua unità.

(c) Se $\big|S\big|>1$, allora esistono in A^S dei divisori di zero (in altre parole, A^S *non* è un dominio di integrità, se non nel caso che $\big|S\big|=1$).

1.6 — Sia $\varGamma$ un gruppo abeliano. Nell'insieme $End_{\mathcal{G}}(\varGamma)$ di tutti gli endomorfismi (di gruppo) di $\varGamma$, si definiscano operazioni $+$ e $\circ$ come segue:

$$\big(\varphi+\psi\big)(\gamma) := \varphi(\gamma)+\psi(\gamma)\,, \quad \big(\varphi\circ\psi\big)(\gamma) := \varphi\big(\psi(\gamma)\big) \quad \big(\forall\,\gamma\in\varGamma\big) \quad \forall\ \varphi,\psi\in End_{\mathcal{G}}(\varGamma)\,.$$

Dimostrare che $\big(End_{\mathcal{G}}(\varGamma)\,;\,+\,,\,\circ\big)$ è un anello unitario.

1.7 — Dato un anello A ed un gruppo G, si definisca l'insieme

$$A[G] := \Big\{\textstyle\sum_{g\in G} a_g\, g \,\Big|\, a_g\in A\,,\ \forall\ g\in G\Big\}$$

e in esso le operazioni $+$ e $\cdot$ date da

$$\begin{aligned}\Big(\textstyle\sum_{h\in G} a_h\, h\Big)+\Big(\textstyle\sum_{k\in G}\alpha_k\, k\Big) &:= \textstyle\sum_{g\in G}\left(a_g+\alpha_g\right)g\\ \Big(\textstyle\sum_{h\in G} a_h\, h\Big)\cdot\Big(\textstyle\sum_{k\in G}\alpha_k\, k\Big) &:= \textstyle\sum_{g\in G}\Big(\sum_{h,k\in G:h\,k=g} a_h\,\alpha_k\Big)\,g\end{aligned}$$

Si dimostri che:

(a) $A[G]$ è un anello rispetto alle due operazioni suddette.

(b) Se A è unitario, allora $A[G]$ è unitario, precisando quale sia la sua unità.

1.8 — Sia S un insieme di numeri primi. Definiamo

$$\mathbb{Z}_S := \left\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\,\middle|\,\text{i fattori primi di } n \text{ sono tutti elementi di } S\right\}$$

Si dimostri che:

(a) $\mathbb{Z}_S$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

(b) Ogni sottoanello di $\mathbb{Q}$ è del tipo $\mathbb{Z}_S$, per un certo insieme di numeri primi S.

1.9 — *Gli interi di Gauss* — Dimostrare che il sottoinsieme $\mathbb{Z}[i]$ di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}[i] := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + i\, b \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$ (detto *anello degli interi di Gauss*).

1.10 — Sia A un sottoanello dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss (definito nel precedente esercizio **1.9**), tale che $1 \in A$. Dimostrare che si ha necessariamente una delle due possibilità seguenti:

(1) $A = \mathbb{Z}$, *(2)* $\exists\, k \in \mathbb{N}_+$ tale che $A := \left\{ a + i\, k\, b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1.11 — Siano A un anello commutativo. Nell'insieme prodotto cartesiano $E_A := A \times A$, si considerino le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ definite da

$$(a,b) \oplus (c,d) := (a+c\,, b+d)\,, \quad (a,b) \otimes (c,d) := (a\,c + b\,d\,, b\,c + a\,d)$$

per ogni (a,b), $(c,d) \in E_A$. Si dimostri che:

(a) $\big(E_A\,; \oplus\,, \otimes \big)$ è un anello.
(b) Se $|A| > 1$, l'anello E_A contiene divisori di zero.
(c) Se A è un dominio di integrità, i divisori di zero di E_A sono tutti e soli della forma (a,a) oppure $(a,-a)$, per ogni $a \in A$.

1.12 — *Immergibilità di ogni anello in un anello unitario* — Sia A un anello. Nell'insieme $A_1 := \mathbb{Z} \times A$, si definiscano le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ definite da

$$(n,a) \oplus (\nu,\alpha) := (n+\nu\,, a+\alpha)\ , \qquad (n,a) \otimes (\nu,\alpha) := (n\,\nu\,,\, n\,\alpha + \nu\,a + a\,\alpha)$$

per ogni (n,a), $(\nu,\alpha) \in A_1$. Si dimostri che:

(a) $\big(A_1\,; \oplus\,, \otimes \big)$ è un anello unitario (precisando quale sia la sua unità).
(b) Esiste un morfismo iniettivo di anelli da A ad A_1.
(c) Se A è unitario, il morfismo di cui al punto *(b)* qui sopra *non* invia l'unità di A nell'unità di A_1.

1.13 — Sia A un anello commutativo, e sia $\{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ una famiglia di sottoanelli di A. Si dimostri che l'intersezione $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$ è un sottoanello di A.

2 — Sottoanelli, ideali

2.1 — Sia A un anello, $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $Mat(n,A)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in A, con la struttura di anello rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto righe per colonne. Siano $B_+(n,A)$ e $B_-(n,A)$ i sottoinsiemi delle matrici triangolari superiori e delle matrici triangolari inferiori rispettivamente, cioè

$$\begin{aligned} B_+(n,A) &:= \left\{ \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,n;} \in Mat(n,A) \;\middle|\; a_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i > j \right\} \\ B_-(n,A) &:= \left\{ \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,n;} \in Mat(n,A) \;\middle|\; a_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i < j \right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che $B_+(n,A)$ e $B_-(n,A)$ sono sottoanelli di $Mat(n,A)$.

2.2 — Sia A un anello, $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $Mat(n,A)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in A, con la struttura di anello rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto righe per colonne. Per ogni $0 \leq k \leq n-1$, si definiscano i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} T_+^{(k)}(n,A) &:= \left\{ \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,n;} \in Mat(n,A) \;\middle|\; a_{i,j} = 0\,, \;\; \forall\, j-i < k \right\} \\ T_-^{(k)}(n,A) &:= \left\{ \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,n;} \in Mat(n,A) \;\middle|\; a_{i,j} = 0\,, \;\; \forall\, i-j < k \right\} \end{aligned}$$

Dimostrare che, per ogni k, valgono le seguenti proprietà:

(a) $T_+^{(k)}(n,A)$ e $T_-^{(k)}(n,A)$ sono sottoanelli di $Mat(n,A)$.
(b) $T_+^{(0)}(n,A) = B_+(n,A)$ e $T_-^{(0)}(n,A) = B_-(n,A)$.
(c) $T_+^{(k)}(n,A)$ è ideale bilatero di $T_+^{(h)}(n,A)$, per ogni $0 \leq h \leq k \leq n-1$.
(d) $T_-^{(k)}(n,A)$ è ideale bilatero di $T_-^{(h)}(n,A)$, per ogni $0 \leq h \leq k \leq n-1$.

2.3 — Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori reali, con la struttura di anello (commutativo unitario) data nell'esercizio **1.5**. Si definiscano i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} Div\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) &:= \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \{+\infty, -\infty\} \right\} && \textit{(successioni divergenti)} \\ Boun\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) &:= \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists\, M \in \mathbb{R} : \left|a_n\right| \leq M \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \right\} && \textit{(successioni limitate)} \\ Conv\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) &:= \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \right\} && \textit{(successioni convergenti)} \\ Conv_0\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) &:= \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0 \right\} && \textit{(successioni infinitesime)} \end{aligned}$$

Dimostrare che:

(a) $Div\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ non è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ma non ne è ideale.
(c) $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, ma non ne è ideale.
(d) $Conv_0\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è sottoanello di $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ e di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(e) $Conv_0\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ è ideale di $Conv\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$ e di $Boun\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big)$, ma non di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.4 — Siano A un anello, S un insieme, e A^S l'insieme di tutte le applicazioni da S ad A, con la struttura di anello data nell'esercizio **1.5**. Per ogni $f \in A^S$, si definisca

$$Supp(f) := \big\{\, s \in S \,\big|\, f(s) \neq 0 \,\big\} \quad .$$

Dimostrare che:

(a) Il sottoinsieme $A^S_{fin} := \left\{ f \in A^S \,\middle|\, Supp(f) \text{ è finito} \right\}$ è un ideale bilatero di A^S.

(b) Per ogni $\Sigma \subseteq S$, il sottoinsieme $A^S_{(\Sigma)} := \left\{ f \in A^S \,\middle|\, f(\sigma) = 0\,,\ \forall\, \sigma \in \Sigma \right\}$ è un ideale bilatero di A^S.

2.5 — Sia (a,b) un intervallo non vuoto, chiuso e limitato, della retta reale.

Sia $C^0\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni continue da (a,b) ad $\mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$ sia $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$ che siano differenziabili fino all'ordine k (incluso). Infine, sia $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ l'insieme di tutte le funzioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$ che siano differenziabili fino a qualsiasi ordine.

Nell'insieme $\mathbb{R}^{(a,b)}$ di tutte le applicazioni da (a,b) ad $\mathbb{R}$, si consideri con la struttura di anello data nell'esercizio **1.5**. Dimostrare che:

(a) $C^0\big((a,b);\mathbb{R}\big)$, $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ — $\forall\, k \in \mathbb{N}_+$ — e $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ sono tutti sottoanelli di $(a,b)^{\mathbb{R}}$, ma non ne sono ideali.
(b) Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, il sottoanello $C^\infty\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ non è ideale di $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$.
(c) Per ogni $k \in \mathbb{N}_+$, il sottoanello $C^k\big((a,b);\mathbb{R}\big)$ non è ideale di $C^{k-1}\big((a,b);\mathbb{R}\big)$.

2.6 — Sia A un anello commutativo. Definiamo

$$\mathfrak{N}(A) := \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = 0 \right\}$$

e chiamiamo *nilpotenti* gli elementi di $\mathfrak{N}(A)$. Dimostrare che:

(a) $\mathfrak{N}(A)$ è un ideale di A.
(b) Per ogni $a \in \mathfrak{N}(A)$, l'elemento $(1-a)$ è invertibile in A. In altre parole, si ha

$$\big\{\, 1-a \,\big|\, a \in \mathfrak{N}(A) \,\big\} \subseteq U(A) \quad .$$

2.7 — Con la notazione del precedente esercizio **2.6**, si calcolino $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{12}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{30}\big)$, $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{17}\big)$ e $\mathfrak{N}\big(\mathbb{Z}_{84}\big)$.

2.8 — Dimostrare che in $\mathbb{Z}[x]$ si ha $(z) \cap (x) = (z\,x)$, per ogni $z \in Z$.

2.9 — Sia A un anello, R un sottoanello di A, e I un ideale (risp. sinistro, destro, bilatero) di A. Dimostrare che $I \cap R$ è un ideale (risp. sinistro, destro, bilatero) di R.

2.10 — Nel seguito, si leggano i simboli $\leq$, $\trianglelefteq_s$, $\trianglelefteq_d$, $\trianglelefteq$ rispettivamente come "è sottoanello di", "è ideale sinistro di", "è ideale destro di", "è ideale (bilatero) di".

Sia A un anello. Dati I, $J \subseteq A$, sia $I + J := \big\{ i + j \,\big|\, i \in I \,,\, j \in J \big\}$. Dimostrare che:

(a) $I \trianglelefteq_s A \,,\; J \trianglelefteq_s A \implies \big(I + J\big) \trianglelefteq_s A$.
(b) $I \trianglelefteq_d A \,,\; J \trianglelefteq_d A \implies \big(I + J\big) \trianglelefteq_d A$.
(c) $I \trianglelefteq A \,,\; J \trianglelefteq A \implies \big(I + J\big) \trianglelefteq A$.
(d) $I \leq A \,,\; J \trianglelefteq A \implies \big(I + J\big) \leq A$.
(e) $I \trianglelefteq A \,,\; J \leq A \implies \big(I + J\big) \leq A$.
(f) In generale, $I \leq A \,,\; J \leq A \;\not\Longrightarrow\; \big(I+J\big) \leq A$ *(trovare un controesempio).*

2.11 — Sia A un anello. Per ogni famiglia $\big\{I_\sigma\big\}_{\sigma\in\Sigma}$ di sottoinsiemi di A, si definisca

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma := \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists\, k \in \mathbb{N} \,,\, \sigma_1 \,,\, \dots \,,\, \sigma_k \in \Sigma \,,\, i_{\sigma_1} \in I_{\sigma_1} \,,\, \dots \,,\, i_{\sigma_k} \in I_{\sigma_k} \;:\; a = \sum_{s=1}^{k} i_{\sigma_s} \right\}$$

Dimostrare che:

(a) $I_\sigma \trianglelefteq_s A \;\forall\, \sigma \in \Sigma \implies \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_s A \;,\; \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_s A$.
(a) $I_\sigma \trianglelefteq_d A \;\forall\, \sigma \in \Sigma \implies \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_d A \;,\; \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq_d A$.
(a) $I_\sigma \trianglelefteq A \;\forall\, \sigma \in \Sigma \implies \bigcap_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq A \;,\; \sum_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma \trianglelefteq A$.

2.12 — Sia A un anello commutativo. Dati I, $J \triangleleft A$, sia

$$\big(I : J\big) := \big\{ a \in A \,\big|\, a\,j \in I \,,\;\; \forall\, j \in J \big\} \quad .$$

Dimostrare che:

(a) $\big(I : J\big) \trianglelefteq A$
(b) $I \subseteq \big(I : J\big)$
(c) $\big(I : J\big)\, J \subseteq I \bigcap J$
(c) $\big(I : I + J\big) = \big(I : J\big)$

2.13 — Sia A un anello. Per ogni $a \in A$, dimostrare che:

(a) $(a)_s := A\,a \equiv \left\{ \alpha\,a \;\middle|\; \alpha \in A \right\} \trianglelefteq_s A$
(b) $(a)_d := a\,A \equiv \left\{ a\,\alpha \;\middle|\; \alpha \in A \right\} \trianglelefteq_d A$
(c) $Ann_s(a) := \left\{ \alpha \in A \;\middle|\; \alpha\,a = 0 \right\} \trianglelefteq_s A$
(d) $Ann_d(a) := \left\{ \alpha \in A \;\middle|\; a\,\alpha = 0 \right\} \trianglelefteq_d A$

— *N.B.: se A è commutativo, si scrive* $(a) := (a)_s \equiv (a)_d$ —

2.14 — Con la notazione del precedente esercizio **2.12**, si calcolino

$$Ann_s\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) , \quad Ann_s\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) , \quad Ann_d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) , \quad Ann_d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) .$$

nell'anello $Mat(n, \mathbb{Q})$. Si verifichi inoltre che tali sottoinsiemi *non* sono ideali *bilateri* dell'anello $Mat(n, \mathbb{Q})$.

2.15 — Sia A un anello. Dimostrare che:

(a) Se $L \trianglelefteq_s A$, allora $Ann_s(L) := \left\{ \alpha \in A \;\middle|\; \alpha\,\ell = 0\,,\ \forall\, \ell \in L \right\} \trianglelefteq A$
(b) Se $L \trianglelefteq_d A$, allora $Ann_d(L) := \left\{ \alpha \in A \;\middle|\; \ell\,\alpha = 0\,,\ \forall\, \ell \in L \right\} \trianglelefteq A$