ESERCIZI DI ALGEBRA
TEOREMI DI SYLOW, GRUPPI ABELIANI FINITI

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dimostrare che in ogni gruppo G di ordine 80 esiste un sottogruppo caratteristico non banale, cioè diverso da $\{1_G\}$ e da G stesso.

2 — Dimostrare che in ogni gruppo G di ordine 405 esiste un sottogruppo caratteristico non banale, cioè diverso da $\{1_G\}$ e da G stesso.

3 — Dimostrare che in ogni gruppo G di ordine 165 esistono sottogruppi normali N_{11}, N_{33} e N_{55} con $|N_{11}| = 11$, $|N_{33}| = 33$, $|N_{55}| = 55$ e $N_{11} \subseteq N_{33}$, $N_{11} \subseteq N_{55}$.

Dimostrare poi che ogni tale gruppo G è risolubile, con approccio *diretto* — cioè *senza* usare il risultato per cui ogni gruppo di ordine il prodotto di tre primi distinti è risolubile.

4 — *Inversione (rafforzata) del Teorema di Lagrange per p–gruppi (finiti):* Sia p un primo e sia G un p–gruppo finito. Dimostrare che per ogni divisore d dell'ordine $|G|$ di G esiste un sottogruppo normale di G di ordine d.

5 — *Inversione del Teorema di Lagrange per gruppi (finiti) abeliani:* Sia G un gruppo finito abeliano. Dimostrare che per ogni divisore d dell'ordine $|G|$ di G esiste un sottogruppo (normale) di G di ordine d.

6 — *Caratterizzazione dei gruppi (finiti) per i quali si inverte (in forma rafforzata) il Teorema di Lagrange:* Sia G un gruppo finito. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) per ogni divisore d di $|G|$, esiste un sottogruppo normale di G di ordine d;

(b) per ogni primo p che divida $|G|$, esiste un unico p–sottogruppo di Sylow H_p in G;

(c) detti $p_1, \dots, p_k$ i primi che dividono $|G|$, e detto H_i un p_i–Sylow per ogni $i = 1, \dots, k$, il gruppo G è prodotto diretto (interno) dei suoi sottogruppi $H_1, \dots, H_k$.

7 — Classificare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 30.

8 — Classificare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 175.

9 — Classificare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 175.

10 — Considerato il gruppo abeliano $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_{70} \times \mathbb{Z}_{20}$, si determinino:

(a) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 1^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per invarianti*”);

(b) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 2^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*”).

11 — Per ciascuno dei tre valori $N_1 := 2659$, $N_1 := 3979$ e $N_1 := 136125$, determinare:

(a) il numero complessivo, a meno di isomorfismi, dei gruppi abeliani di ordine N_i (per $i = 1, 2, 3$);

(b) per ogni classe di isomorfismo di gruppi abeliani di ordine N_i (per $i = 1, 2, 3$), una fattorizzazione in prodotto diretto di gruppi ciclici del tipo dato dal 1^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per invarianti*”);

(c) per ogni classe di isomorfismo di gruppi abeliani di ordine N_i (per $i = 1, 2, 3$), una fattorizzazione in prodotto diretto di gruppi ciclici del tipo dato dal 2^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (=“fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*”);