ESERCIZI DI ALGEBRA
DOMINI UNITARI, FATTORIZZAZIONE (2)

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big] := \big\{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\,\sqrt{-13}\,\big\}$.
(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un sottoanello di $\mathbb{C}$.
(b) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un dominio di integrità.
(c) Determinare, se esiste, il $M.C.D.\big(\,7\,,\sqrt{-13}-1\big)$ in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$.
(d) Determinare, se esiste, il $M.C.D.\big(\,42\,,5+5\,\sqrt{-13}\big)$ in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$.
(e) Determinare tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$.
(f) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un dominio a fattorizzazione unica.
(g) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un dominio euclideo.
(h) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un dominio a ideali principali.
(i) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-13}\,\big]$ sia un dominio atomico.

2 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauss si consideri l'ideale $I := \big(-3+5\,i\,,\,5-i\,\big)$. Determinare se I sia principale: in caso *negativo* si spieghi il perché, in caso *positivo* si determini esplicitamente un generatore dell'ideale I. Precisare poi se l'ideale I sia proprio — cioè strettamente contenuto in $\mathbb{Z}[\,i\,]$ — e, in caso affermativo, precisare se sia massimale oppure no.

3 — Calcolare tutti gli ideali dell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]\Big/\big(7\,(3-i)\big)$, precisando quali tra essi siano primi e quali massimali.

4 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauss, si consideri l'ideale $I := \big(\,-3+5\,i\,,\,5-i\,\big)$. Determinare se I sia massimale, primo, o nulla di ciò, e calcolare un generatore di I.

5 — Siano $n \in \mathbb{N}_+$ e $f(x) := 2\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3 \in \mathbb{Z}_n[x]$, $\ell(x) := x^2 - x \in \mathbb{Z}_n[x]$. Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}_+$ si abbia $M.C.D.\big(\,f(x)\,,\ell(x)\big) = 1$.

6 — Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{F} := \mathbb{Z}[x]\Big/\big(\,7\,,\,x^3-5\,x+1\,\big)$.

(a) Determinare se esista in $\mathbb{F}$ l'elemento $\big(\,\overline{3+x-5\,x^4}\,\big)^{-1}$ inverso di $\big(\,\overline{3+x-5\,x^4}\,\big)$. In caso positivo, lo si calcoli esplicitamente; in caso negativo, si spieghi perché non esista.

(b) Determinare se $\mathbb{F}$ sia un campo oppure no.

(c) Calcolare la caratteristica e la cardinalità di $\mathbb{F}$.

7 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauss, si fattorizzare 182 in irriducibili.

8 — Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{13}\,\big] := \big\{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{13}\,\big\}$ è un dominio atomico ma non un dominio a fattorizzazione unica. In particolare, si mostri esplicitamente che per un opportuno elemento di $\mathbb{Z}\big[\sqrt{13}\,\big]$ esistono due fattorizzazioni in atomi (=irriducibili) *non* equivalenti.

9 — Determinare se il polinomio $f(x,y) := x^2 + 3\,x\,y + y^2 + 3\,x - 1 \in \mathbb{Z}[x,y]$ sia riducibile o irriducibile nell'anello $\mathbb{Z}[x,y]$. Nel primo caso, si determini una fattorizzazione di $f(x,y)$ in irriducibili, se è possibile, oppure si spieghi perché non è possibile; nel secondo caso, si spieghi perché $f(x,y)$ sia irriducibile.

10 — *Regola di Fubini:* Sia D un dominio a fattorizzazione unica, sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti, e sia $f(x) = a_n\,x^n + \cdots + a_1\,x + a_0 \in D[x] \setminus \{0\}$ un polinomio non nullo di grado n , e sia $q := r\big/s \in Q(D)$ un razionale con $r, s \in D$ tali che $M.C.D.(r,s) = 1$. Dimostrare che se q è radice di $f(x)$, cioè $f(q) = 0$, allora r divide a_0 e s divide a_n in D .

11 — Fattorizzare in irriducibili il polinomio $f(x) := 15\,x^4 + 55\,x^3 - 50\,x - 20 \in \mathbb{Q}[x]$.

12 — Sia K un campo, e sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio di grado 3 . Dimostrare che $f(x)$ è riducibile in $K[x]$ se e soltanto se $f(x)$ ha una radice in K .

13 — *Criterio di Riduzione:* Siano D ed E due domini unitari, sia $\sigma : D \longrightarrow E$ un morfismo di anelli e $\sigma_x : D[x] \longrightarrow E[x]$ $\Big(\, f(x) = \sum_n a_n\,x^n \mapsto \sigma_x\big(f(x)\big) := \sum_n \sigma(a_n)\,x^n \,\Big)$ il corrispondente morfismo tra gli anelli di polinomi associati. Dato $f = f(x) \in D[x]$, dimostrare che se $\partial\big(\sigma_x(f)\big) = \partial(f)$ e $\sigma_x(f)$ non ha in $E[x]$ una fattorizzazione in prodotto di polinomi di grado strettamente più basso del suo, allora lo stesso vale per f in $D[x]$.

14 — Dimostrare che il polinomio $f(x) := 5\,x^3 - 4\,x^2 + 13\,x + 17 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ e in $\mathbb{Q}[x]$.