ESERCIZI DI ALGEBRA
CAMPI (2)

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dimostrare che, per ogni primo p, il polinomio

$$f(x) \;:=\; x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \;\in\; \mathbb{Z}[x]$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$ (e quindi in $\mathbb{Q}[x]$).

((<u>*Suggerimento*</u>*:* Applicare il Criterio di Eisenstein per dimostrare che il polinomio $h(y) := f(y+1) \in \mathbb{Z}[y]$ è irriducibile, e poi sfruttare l'isomorfismo $\Phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[y]$ dato da $P(x) \mapsto \Phi\big(P(x)\big) := P(\,y{+}1)$ per concludere che anche $f(x)$ a sua volta è irriducibile.))

2 — Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{F} := \mathbb{Q}[x]\Big/\big(x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 3\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{F}$ è un campo.

(b) Posto $\alpha := \overline{x} \in \mathbb{F}$, calcolare $(1-\alpha)^{-1}$ esprimendolo come combinazione lineare di 1, α e α^2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

3 — Si consideri l'anello quoziente $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_5[x]\Big/\big(x^3 - x^2 + x + 1\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{F}$ è un campo.

(b) Calcolare la caratteristica e la cardinalità di $\mathbb{F}$.

(c) Determinare esplicitamente un generatore del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{F}^*\,;\,\cdot\big)$ del campo $\mathbb{F}$, dove $\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

4 — <u>*Radici dell'unità*</u>*:* Dato un campo K e $n \in \mathbb{N}$, sia $U_n := \big\{\, \zeta \in K \,\big|\, \zeta^n = 1 \,\big\}$. Dimostrare che:

(a) U_n è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $K^* := K \setminus \{0\}$ del campo K;

(b) U_n è finito e ciclico;

(c) se $p := \mathit{char}(K) > 0$, allora $U_{np} = U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(d) ☡ se $n = \ell p^s$ con $p \nmid \ell$, allora U_n ha ordine ℓ.

5 — Data una radice terza primitiva dell'unità $\zeta_3 \in \mathbb{Q}^a$ — cioè ζ_3 è un generatore del gruppo ciclico delle radici terze dell' unità in $\mathbb{Q}^a$ — sia $\alpha := 2 - \zeta_3\sqrt{5} \in \mathbb{Q}\big(\,\zeta_3\,,\sqrt{5}\,\big)$.

Calcolare tutti i coniugati di α su $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{Q}^a$).

6 — Determinare il campo di spezzamento ed il gruppo di Galois (su $\mathbb{Q}$) per il polinomio $f(x) := x^3 - 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

7 — Si stabilisca se esistano, e in caso affermativo se ne costruisca un esempio, campi finiti delle seguenti cardinalità: 18, 16, 27, 28, 29, 31, 239.

8 — Dimostrare che i due anelli quoziente definiti da $\mathbb{F}_+ := \mathbb{Z}_2[x] \Big/ \big(x^3 - x^2 + 1 \big)$ e $\mathbb{F}_- := \mathbb{Z}_2[x] \Big/ \big(x^3 - x + 1 \big)$ sono entrambi campi e che sono isomorfi tra loro, esibendo un isomorfismo esplicito tra di essi.