Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

Sessione estiva anticipata — I appello

prova scritta del 24 Gennaio 2014

. . . .

N.B.: (1) compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile;*
(2) i punti contrassegnati con il simbolo ☡ vanno affrontati <u>*in seconda battuta*</u>.

. . . . $*$ . . . .

[1] — Sia G un gruppo di ordine 42 . Dimostrare che:

(a) esiste in G uno ed un solo sottogruppo caratteristico K_7 di ordine 7 ;

(b) esiste in G uno ed un solo sottogruppo caratteristico K_{21} di ordine 21 ;

(c) G è risolubile; in particolare, si presenti esplicitamente una specifica catena discendente di sottogruppi di G, ciascuno normale nel precedente, in modo che i rispettivi quozienti siano tutti abeliani;

(d) G si fattorizza come prodotto semidiretto (interno) $G = H \ltimes N$ di un sottogruppo H ed un sottogruppo normale N entrambi non banali.

[2] — Determinare il numero di classi di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine 12000 . Inoltre, per ciascuna classe di isomorfismo si esibisca esplicitamente un rappresentante della classe, presentato come prodotto diretto di gruppi ciclici come prescritto dal *1^0 Teorema di Classificazione* e dal 2^0 *Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

[3] — Dati un anello R , un sottoinsieme S e un sottoanello A in R , siano
$$S' := \big\{\, r \in R \,\big|\, r\,s = s\,r \;\; \forall\, s \in S \,\big\} \;, \qquad A' := \big\{\, r \in R \,\big|\, r\,a = a\,r \;\; \forall\, a \in A \,\big\}$$

(a) Dimostrare che S' e A' sono sottoanelli di R .

(b) Dimostrare che $S'' \supseteq S$ e $A'' \supseteq A$.

(c) Dimostrare che $S' = \big\langle S \big\rangle'$, dove $\big\langle S \big\rangle$ è il sottoanello di R generato da S .

[4] — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big] \;:=\; \Big\{\, z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{-6} \,\Big\}$$

Dimostrare che:

(a) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$;

(b) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è un dominio di integrità;

(c) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è un dominio atomico;

(d) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ non è un dominio a fattorizzazione unica;

(e) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ non è un dominio a ideali principali;

(f) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ non è un dominio di Bézout.

[5] — Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)$.

(a) Determinare un *elemento primitivo* dell'estensione — cioè un generatore del campo $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)$ come estensione (semplice) del campo $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare tutti gli elementi $b \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)$ tali che $b^2 \in \mathbb{Q}$.

(c) Determinare tutti gli elementi $c \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)$ che abbiano grado 2 su $\mathbb{Q}$.

(d) Determinare il gruppo di Galois $G := Gal\Big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)\Big/\mathbb{Q}\Big)$ dell'estensione $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{5}\,\big)\Big/\mathbb{Q}$, descrivendolo nel modo più completo possibile.