Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

Sessione estiva

prova scritta del 14 Luglio 2014

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile;*

. . . .   *   . . . .

[1] — Sia G un gruppo di ordine 105.

(a) Calcolare quanti possano essere in G gli elementi di ordine 5 e gli elementi di ordine 7.

(b) Dimostrare che in G esiste un sottogruppo caratteristico di ordine 5 oppure un sottogruppo caratteristico di ordine 7. Possono esistere anche *entrambi* (nello stesso G)?

(c) Dimostrare che se in G esiste un unico 3-sottogruppo di Sylow, allora G è ciclico.

[2] — Dato un gruppo G, siano

$$\lambda \,:\, G \hookrightarrow \mathcal{S}(G)\ ,\ \ g \mapsto \lambda(g)\,\big(\, x \mapsto \big(\lambda(g)\big)(x) := g\,x\,\big)$$

e

$$\rho \,:\, G \hookrightarrow \mathcal{S}(G)\ ,\ \ g \mapsto \rho(g)\,\big(\, x \mapsto \big(\rho(g)\big)(x) := x\,g^{-1}\,\big)$$

rispettivamente la rappresentazione regolare sinistra e la rappresentazione regolare destra di G. Definiamo

$$\begin{aligned} \lambda(G)' \ &:= \ \big\{\, \varphi \in \mathcal{S}(G) \,\big|\, \varphi \circ \lambda(g) = \lambda(g) \circ \varphi \ ,\ \forall\, g \in G \,\big\} \\ \rho(G)' \ &:= \ \big\{\, \psi \in \mathcal{S}(G) \,\big|\, \psi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \psi \ ,\ \forall\, g \in G \,\big\} \end{aligned}$$

Dimostrare che:

(a) $\lambda(G)'$ e $\rho(G)'$ sono sottogruppi di $\mathcal{S}(G)$;

(b) $\lambda(G)' = \rho(G)$ e $\rho(G)' = \lambda(G)$.

[3] — Determinare il numero di classi di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine 1620. Inoltre, per ciascuna classe di isomorfismo si esibisca esplicitamente un rappresentante della classe, fattorizzato (in due modi) come prodotto diretto di gruppi ciclici come prescritto dal 1^0 *Teorema di Classificazione* e dal 2^0 *Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

[4] — Sia A l'anello $A := \big(\mathbb{Z}_7[x]\big)\big[y, y^{-1}\big]\Big/\big(x^2 - 3\,y^{-1}\,,\, y-4\big)$.

(a) Determinare se A sia un dominio di integrità.

(b) Determinare se A sia un campo.

(c) Determinare la cardinalità di A.

(d) Calcolare il gruppo $U(A)$ delle unità dell'anello A.

(e) Determinare se il gruppo $U(A)$ delle unità dell'anello A sia ciclico oppure no. In caso negativo se ne determini la struttura ciclica secondo il 1^0 e il 2^0 Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti; in caso affermativo se ne determini un generatore.

[5] — Si consideri il polinomio

$$f(x) \;:=\; x^4 + x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 2$$

come polinomio in $\mathbb{K}[x]$ con $\mathbb{K} \in \big\{\,\mathbb{Q}\,,\mathbb{R}\,,\mathbb{Z}_7\,\big\}$.

Per ciascuno dei campi $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$, si determinino:

(a) il campo di spezzamento $\mathbb{K}_f$ di $f(x)$ su $\mathbb{K}$;

(b) il gruppo di Galois $G_f^{\mathbb{K}}$ di $f(x)$ su $\mathbb{K}$;

(c) tutte le eventuali estensioni intermedie non banali tra $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}_f$, descrivendole nel modo più completo possibile.