

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2019–2020

Esame scritto del 21 Febbraio 2020 — Sessione Estiva Anticipata, II appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Nell’anello $\mathbb{Z}[x, y]$ dei polinomi in due variabili a coefficienti interi, consideriamo i due polinomi

$$h(x, y) := y^3 - 3x^2y + 6xy + 5x - 3y - 5, \quad \ell(x, y) := 3y^2 - x - y + 5.$$

(a) Dimostrare che l’anello quoziente $\mathbb{Z}[x, y]/(h(x, y))$ è un dominio.

(b) Dimostrare che l’anello quoziente $\mathbb{Z}[x, y]/(\ell(x, y))$ è un dominio a fattorizzazione unica.

(c) Dimostrare che l’anello quoziente $\mathbb{Z}[x, y]/(\ell(x, y))$ non è un dominio a ideali principali.

(d) Dimostrare che l’anello quoziente $\mathbb{Q}[x, y]/(\ell(x, y))$ è un dominio euclideo.

[2] — Sia \mathbb{Z}_{26} , l’anello degli interi modulo 26, e sia $U(\mathbb{Z}_{26})$ il gruppo (moltiplicativo) dei suoi elementi invertibili.

(a) Calcolare esplicitamente tutti i sottogruppi di Sylow di $U(\mathbb{Z}_{26})$.

(b) Determinare la (unica) decomposizione di $U(\mathbb{Z}_{26})$ come prodotto diretto di gruppi ciclici $U(\mathbb{Z}_{26}) \cong C_1 \times \cdots \times C_k$ di ordini $d_i := |C_i|$ ($i = 1, \dots, k$) tali che $d_{i+1} \mid d_i$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$.

[3] — Sia G un gruppo, e sia H un sottogruppo di G con indice finito n , cioè tale che $(G : H) = n \in \mathbb{N}_+$. Dimostrare che esiste un sottogruppo normale N di G tale che $N \leq H$ e $(G : N) \mid n!$ — cioè l’indice di N in G divide $n!$.

[4] — Sia G un gruppo di ordine 231. Dimostrare che:

- (a) esiste in G un sottogruppo ciclico di ordine 33;
- (b) esiste in G un sottogruppo ciclico di ordine 77 che è normale;
- (c) il centro $Z(G)$ di G è non banale.

[5] — Sia $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ il campo estensione di \mathbb{Q} generato da due elementi α e β con polinomi minimi su \mathbb{Q} dati da $p_\alpha(x) = x^3 - 5$ e $p_\beta(x) = x^2 + 3$.

- (a) Determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ su \mathbb{Q} .
 - (b) Determinare un elemento primitivo dell'estensione $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ di \mathbb{Q} .
 - (c) Determinare se l'estensione $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ di \mathbb{Q} sia normale oppure no.
-
-