Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 9 Febbraio 2026 — 6º appello, sessione invernale

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · $*$ · · · · · · · · ·

[1] — Sia A un anello commutativo unitario, e sia $\mathfrak{N}(A)$ l'insieme di tutti i suoi elementi nilpotenti, cioè

$$\mathfrak{N}(A) \; := \; \Big\{ a \in A \;\Big|\; \exists\, n \in \mathbb{N} \, : \, a^n = 0_{\scriptscriptstyle A} \Big\}$$

Dimostrare che:

(a) $\mathfrak{N}(A)$ è un ideale di A;

(b) $\mathfrak{N}(A)$ è contenuto nell'intersezione di tutti gli ideali primi di A;

(c) vale l'uguaglianza $\mathfrak{N}\big(A[x]\big) = \big(\mathfrak{N}(A)\big)[x]$, con

$$\big(\mathfrak{N}(A)\big)[x] \; := \; \Big\{ \textstyle\sum_{k=0}^{d} a_k\, x^k \in A[x] \;\Big|\; a_0\,, a_1\,, \dots, a_d \in \mathfrak{N}(A) \Big\} \; .$$

[2] — Si considerino l'anello quoziente $A := \mathbb{Q}[x,y] \Big/ \big(x^2 - y\big)$, l'ideale $I := \big(\, x\,y^2 - x^2 - x\,y + 1 \,,\, x^2\,y^2 - 1 \,\big)$ in A e $f := \big(x\,y + y^2 - x - 1\big) \in A$.

(a) Dimostrare che l'anello A è un dominio euclideo.

(b) Fattorizzare f come prodotto di elementi irriducibili in A.

(c) Determinare tutti gli ideali di A che contengano l'ideale I, precisando quali tra questi siano (eventualmente) primi e quali massimali.

[3] — Determinare (a meno di isomorfismi, e dandone una descrizione il più completa possibile) tutti i gruppi di ordine 845 .

[4] — Calcolare il numero di bracciali (diversi) che si possono realizzare usando esattamente 5 perle bianche, 3 nere e 4 rosse.

[5] — Si consideri in $\mathbb{Q}[x]$ il polinomio

$$f(x) \;:=\; x^5 \,+\, 5\,x^4 \,-\, 5\,x^3 \,-\, 25\,x^2 \,+\, 6\,x \,+\, 30$$

si denoti con $\mathbb{Q}_{f(x)}$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$, e si indichi con $\mathcal{G}_{f(x)} := Gal\Big(\mathbb{Q}_{f(x)}\big/\mathbb{Q}\Big)$ il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(a) Descrivere il gruppo di Galois $\mathcal{G}_{f(x)}$, precisandone la struttura di gruppo e descrivendo esplicitamente l'azione di ciascun suo elemento sulle radici di $f(x)$.

(b) Determinare il numero di estensioni intermedie tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{f(x)}$, cioè il numero di campi $\mathbb{K}$ tali che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{Q}_{f(x)}$.

(c) Determinare se esista una estensione intermedia $\mathbb{K}$ — cioè come al punto *(b)* qui sopra — tale che l'estensione $\mathbb{K}\Big/\mathbb{Q}$ sia *non* normale.