Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 26 Gennaio 2026 — 5º appello, sessione invernale

N.B.: compilare il compito in modo <u>sintetico</u> ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] — Per ciascuno dei due possibili valori di $n \in \{675, 588\}$, si richiede di:

(a) determinare il numero di gruppi abeliani, a due a due non isomorfi, di ordine n ;

(b) per ciascuna classe di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine n trovata al punto *(a)*, determinare esplicitamente uno dei gruppi nella classe.

[2] — Determinare il numero di anagrammi distinti per ciascuna delle due parole

"KIKKIRIKI" e "KIAKKIERARE"

[3] — Siano G_{35} e G_{36} due gruppi di ordine rispettivamente $|G_{35}| = 35$ e $|G_{36}| = 36$, e sia $\mathbb{Z}_{34}$ il gruppo degli interi modulo 34 (rispetto all'operazione di addizione tra classi resto).

(a) Determinare tutti i possibili omomorfismi $\varphi : G_{35} \longrightarrow G_{36}$ e quelli $\psi : G_{36} \longrightarrow G_{35}$, precisando quali di essi — eventualmente — siano *mono*morfismi, *epi*morfismi o *iso*morfismi.

(b) Dimostrare che un qualunque gruppo prodotto semidiretto del tipo $\mathbb{Z}_{34} \rtimes G_{35}$ è necessariamente un prodotto *diretto*.

(c) Dimostrare che ogni prodotto semidiretto del tipo $\mathbb{Z}_{34} \rtimes G_{35}$ è abeliano, ed è isomorfo al gruppo (additivo) $\mathbb{Z}_{1190}$.

[4] — Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ del campo $\mathbb{C}$ definito da

$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] \;:=\; \Big\{\, z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z} \,:\, z = a + b\,\sqrt{-5} \,\Big\}$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è un dominio a fattorizzazione.

(c) Determinare tutte le possibili fattorizzazioni in prodotto di fattori irriducibili per l'elemento 210 nell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$.

(d) Determinare se l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia un dominio a ideali principali.

[5] — Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ il polinomio

$$p(x) \;:=\; 10\,x^6 \,+\, 5\,x^5 \,-\, 5\,x^4 \,-\, 18\,x^2 \,-\, 9\,x \,+\, 9$$

e per ogni campo $\mathbb{K}$ tale che $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, si denoti con $\mathbb{K}_{p(x)}$ il campo di spezzamento su $\mathbb{K}$ del polinomio $p(x)$.

(a) Fattorizzare $p(x)$ in prodotto di fattori irriducibili nei diversi anelli $\mathbb{A}[x]$ per ogni $\mathbb{A} \in \{\, \mathbb{Z}\,, \mathbb{Q}\,, \mathbb{R}\,, \mathbb{C}\,\}$.

(b) Calcolare il grado $\Big[\,\mathbb{K}_{p(x)} : \mathbb{K}\,\Big]$ dell'estensione di campi $\mathbb{K}_{p(x)}\Big/\mathbb{K}$ per $\mathbb{K} \in \{\, \mathbb{Q}\,, \mathbb{R}\,, \mathbb{C}\,\}$.

(c) Calcolare il gruppo di Galois $\mathcal{G}^{\mathbb{K}}_{p(x)} \,:=\, \mathit{Gal}\Big(\mathbb{K}_{p(x)}\Big/\mathbb{K}\Big)$ del polinomio $p(x)$ sul campo $\mathbb{K}$ per $\mathbb{K} \in \{\, \mathbb{Q}\,, \mathbb{R}\,, \mathbb{C}\,\}$.