**Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"**
**CdL in Matematica**

# ALGEBRA 2

*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2024–2025*

Esame scritto del 23 Settembre 2025 — 4º appello, sessione autunnale

*N.B.: compilare il compito in modo* <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· ∗ ·········

**[1]** — Sia $G$ un gruppo di ordine $175$ .

*(a)* Dimostrare che $G$ è abeliano.

*(b)* Tenendo conto che il gruppo $G$ è abeliano, determinare quale possa essere la sua struttura ciclica secondo il $1^0$ *Teorema di Classificazione* e il $2^0$ *Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

**[2]** — Sia $\mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi, e sia $\mathbb{F}_5(\alpha)$ un campo estensione di $\mathbb{F}_5$ generato da un elemento $\alpha$ tale che $\alpha^4 + 4\,\alpha - 1 = 0$ in $\mathbb{F}_5(\alpha)$ .

*(a)* Dimostrare che il grado dell'estensione di campi $\mathbb{F}_5(\alpha)\big/\,\mathbb{F}_5$ è $4$ .

*(b)* Descrivere esplicitamente un elemento non banale del gruppo di Galois $Gal\big(\mathbb{F}_5(\alpha)\big/\,\mathbb{F}_5\big)$ , precisandone l'effetto sugli elementi di $\mathbb{F}_5$ e sul generatore $\alpha$ dell'estensione $\mathbb{F}_5(\alpha)\big/\,\mathbb{F}_5$ .

*(c)* Determinare il numero totale di campi $\mathbb{F}$ intermedi dell'estensione $\mathbb{F}_5(\alpha)\big/\,\mathbb{F}_5$ , cioè tali che $\mathbb{F}_5 \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_5(\alpha)$ .

**[3]** — Si consideri l'anello $\mathbb{A} \in \{\mathbb{Z}\,,\mathbb{Z}_5\}$ e il polinomio

$$f(x) \;:=\; x^5 - 14\,x^4 - 15\,x^3 + 30\,x^2 + 24\,x - 6 \;\in\; \mathbb{A}[x]$$

*(a)* Fattorizzare $f(x)$ in polinomi irriducibili in $\mathbb{A}[x]$ , per ogni scelta di $\mathbb{A} \in \{\,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Z}_5\}$ .

*(b)* Determinare se esistano in $\mathbb{A}$ radici multiple di $f(x)$ .

*(continua...)* $\Longrightarrow$

**[4]** — Descrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi $G$ di ordine $28$.

**[5]** — Sia $G$ un gruppo. Per ogni $G$–spazio $S$, si dice $G$–sottospazio di $S$ ogni sottoinsieme $T$ in $S$ tale che $g.t \in T$ per ogni $t \in T$ e ogni $g \in G$.

Per un anello unitario $\big(A\,;\,+\,,\,\cdot\,\big)$, si dice che un'azione $G \times A \longrightarrow A$ di $G$ su $A$ è *per automorfismi* se ogni applicazione

$$\sigma_g : A \longrightarrow A\,, \quad a \mapsto \sigma_g(a) := g.a \qquad \big(\forall\;\, a \in A\big)$$

— per ogni $g \in G$ — è un *automorfismo* dell'anello $A$. Inoltre, sia

$$U(A) \;:=\; \big\{\, \alpha \in A \,\big|\, \exists\, \alpha^{-1} \in A \,\big\}$$

il gruppo (moltiplicativo) degli elementi *invertibili* di $A$, e sia

$$N(A) \;:=\; \big\{\, a \in A \,\big|\, \exists\, n \in A : a^n = 0 \,\big\}$$

l'insieme degli elementi *nilpotenti* di $A$.

Dimostrare che:

*(a)* se $G \times A \longrightarrow A$ è un'azione *per automorfismi* del gruppo $G$ (qualsiasi) sull'anello $A$, allora $U(A)$ e $N(A)$ sono $G$–sottospazi di $A$;

*(b)* la funzione $U(A) \times A \longrightarrow A\,,\ \big(\gamma\,,a\big) \mapsto \gamma.a := \gamma\, a\, \gamma^{-1}$, definisce un'azione su *per automorfismi* del gruppo $U(A)$ sull'anello $A$, detta azione per *coniugazione*;

*(c)* ogni ideale (bilatero) di $A$ è un $U(A)$–sottospazio di $A$ rispetto all'azione per coniugazione di $U(A)$ su $A$ introdotta in *(b)*.