

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

CdL in Matematica

**ALGEBRA 2**

*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2024-2025*

Esame scritto del 9 Settembre 2025 — 3° appello, sessione autunnale

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \*

[1] — Si consideri l’anello quoziente

$$A := (\mathbb{Z}_5[x])[y, y^{-1}] / (x^2 - 4y^{-1}, y - 8)$$

- (a) Determinare se  $A$  sia un campo.
- (b) Determinare la cardinalità di  $A$ .
- (c) Determinare la classe di isomorfismo del gruppo  $U(A)$  delle unità dell’anello  $A$ .
- (d) Per ciascuno dei valori  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ , determinare se nell’anello  $A$  esistano radici  $n$ -esime primitive dell’unità.

[2] — Si consideri il polinomio  $f(x) := x^3 + 4x^2 + 10x - 6 \in \mathbb{F}_7[x]$ , nella variabile  $x$ , a coefficienti nel campo  $\mathbb{F}_7$  di sette elementi. Sia poi  $\mathbb{K}_f$  l’anello quoziente  $\mathbb{K}_f := \mathbb{F}_7[x] / (f(x))$ .

- (a) Dimostrare che  $\mathbb{K}_f$  è un campo.
- (b) Determinare la cardinalità di  $\mathbb{K}_f$ .
- (c) Determinare la classe di isomorfismo del gruppo di Galois  $\text{Gal}(\mathbb{K}_f / \mathbb{F}_7)$  dell’estensione di campi  $\mathbb{K}_f / \mathbb{F}_7$ .
- (d) Determinare il numero dei campi intermedi tra  $\mathbb{F}_7$  e  $\mathbb{K}_f$ .

[3] — Dato un numero naturale *dispari*  $n \in (2\mathbb{N} + 1)$ , si consideri il gruppo generale lineare  $G := GL_n(\mathbb{Q})$  delle matrici quadrate invertibili  $n \times n$  a coefficienti nel campo  $\mathbb{Q}$ , e siano  $G_+ := \{ M \in G \mid \det(M) > 0 \}$  e  $G_- := \{ M \in G \mid \det(M) < 0 \}$ .

(a) Dimostrare che  $G_+$  è sottogruppo normale di  $G$ .

(b) Dimostrare che  $G_-$  non è sottogruppo di  $G$ .

(c) Dimostrare che esiste in  $G$  un sottogruppo normale  $\mathcal{Z}$  tale che  $G$  sia isomorfo al prodotto diretto di  $\mathcal{Z}$  con  $G_+$ , in formule  $G \cong \mathcal{Z} \times G_+$ .

[4] — Sia  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}] := \{ z \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{-11} \}$ .

(a) Dimostrare che  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  è un sottoanello di  $\mathbb{C}$ .

(b) Determinare se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia un dominio (oppure no!).

(c) Determinare se l'ideale  $I := (3, -1 + \sqrt{-11})$  in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia principale (oppure no!).

(d) Determinare se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia un dominio a fattorizzazione (non necessariamente unica).

(e) Determinare se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia un dominio a fattorizzazione unica.

(f) Determinare se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia un dominio a ideali principali.

(g) Determinare se  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  sia un dominio euclideo.

[5] — Siano  $G$  un gruppo,  $S$  ed  $S'$  due  $G$ -spazi, e  $\varphi : S \longrightarrow S'$  un'applicazione tale che  $\varphi(g.s) = g.\varphi(s)$  per ogni  $g \in G$ ,  $s \in S$ .

Indicando con  $\mathcal{O}_x$  e con  $St_x$  rispettivamente l'orbita e lo stabilizzatore di un punto  $x$  (in un qualsiasi  $G$ -spazio), dimostrare che:

(a)  $\varphi(\mathcal{O}_s) = \mathcal{O}_{\varphi(s)}$  per ogni  $s \in S$ ;

(b)  $|St_{\varphi(s)}| \geq |St_s|$  per ogni  $s \in S$ ;

(c)  $St_{\varphi(s)} \supseteq St_s$  per ogni  $s \in S$ .