Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 30 Giugno 2025 — 2° appello, sessione estiva

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Si consideri l’anello quoziente

$$A := \mathbb{Z}[x, y] / (x(y + 6) - 3x^2 + x + 2, 4x - y - 7)$$

(a) Dimostrare che A non è un campo.

(b) Dimostrare che A è un dominio euclideo.

[2] — Determinare il numero di anagrammi distinti della parola

“TRATTORIA”

[3] — Sia G un gruppo finito, e sia $\Gamma := \text{Aut}_G(G)$ il suo gruppo degli automorfismi. Il gruppo Γ agisce naturalmente su G ; supponiamo che per tale azione esistano soltanto due Γ -orbite in G .

(a) Dimostrare che tutti gli elementi di G diversi dall’elemento neutro hanno lo stesso ordine.

(b) Dimostrare che G è un p -gruppo (per un qualche primo p).

(c) Dimostrare che G è un gruppo abeliano.

(d) Dimostrare che G è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}_p^n := \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_n$, per un certo $n \in \mathbb{N}$, con p primo come in (b).

(e) Dimostrare che $\Gamma := \text{Aut}_G(G) \cong GL_n(\mathbb{Z}_p)$.

[4] — Sia G un gruppo di ordine 70.

(a) Determinare tutti i valori di $d \in \mathbb{N}_+$ per i quali esista un sottogruppo H in G che abbia ordine d .

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{N}_+$ per i quali esista un sottogruppo normale N in G che abbia ordine t .

[5] — Sia p un primo, $\mathbb{Z}_p$ il campo con p elementi, $\mathbb{Z}_p(y)$ il campo delle funzioni razionali in y a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$, sia $\mathbb{Z}_p[x, y]$ l'anello dei polinomi in x e y a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$, e infine sia $\mathbb{K} := (\mathbb{Z}_p(y))[x] / (x^p - y)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.

(b) Determinare il grado dell'estensione $\mathbb{K} / \mathbb{Z}_p(y)$.

(c) Determinare il grado dell'estensione $\mathbb{K} / \mathbb{Z}_p$.

(d) Dimostrare che il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{K} / \mathbb{Z}_p(y)$ è banale, cioè $\text{Gal}(\mathbb{K} / \mathbb{Z}_p(y)) = \{\text{id}_{\mathbb{K}}\}$.