Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 10 Giugno 2025 — 1$^{\text{o}}$ appello, sessione estiva

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Indicando con $\mathbb{F}_{121}$ il campo con 121 elementi, si dimostri che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x, y, z] \Big/ \big(x^2 + y\,z\,, 11\,, x^2 - 10 \big)$ è isomorfo all'anello $\mathbb{F}_{121}\big[\,t\,, t^{-1}\big]$ dei polinomi di Laurent in t a coefficienti in $\mathbb{F}_{121}$.

[2] — Sia G un gruppo di ordine 80 .

(a) Dimostrare che in G esiste almeno un sottogruppo normale non banale, cioè diverso da $\big\{1_G\big\}$ e da G stesso.

(b) Dimostrare che per ciascuno dei valori $d \in \{1, 2, 4, 5, 8, 16\}$ esiste in G un sottogruppo di ordine d .

(c) Dimostrare che se esiste in G un sottogruppo normale di ordine 5, allora esiste anche un sottogruppo di ordine 10 .

[3] — Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ del campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi definito da $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big] := \big\{\, a + b\sqrt{-6} \;\big|\; a, b \in \mathbb{Z} \,\big\}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è un dominio di integrità.

(c) Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ è un dominio a fattorizzazione.

(d) Determinare tutte le possibili fattorizzazioni in prodotto di fattori irriducibili per l'elemento 70 nell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$.

(e) Determinare se l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$ sia un dominio a ideali principali.

[4] — Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3\}$, $f(x) := (x^{11} - 1) \in \mathbb{K}[x]$ e sia $\mathbb{K}_f$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{K}$. Per ciascuno dei due casi $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, si determini:

(a) il grado dell'estensione $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_f$;

(b) la struttura del gruppo di Galois $G(\mathbb{K}_f/\mathbb{K})$ dell'estensione $\mathbb{K}_f/\mathbb{K}$.

(c) una descrizione esplicita del gruppo $G(\mathbb{K}_f/\mathbb{K})$ — come gruppo di automorfismi di $\mathbb{K}_f$.

[5] — Dato $n \in \mathbb{N}$ e $E_n := \{1, 2, \dots, n\}$, si consideri l'azione del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ su $E_n \times E_n \times E_n$ definita da

$$\sigma.(x, y, z) := (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) \qquad \forall\ \sigma \in \mathcal{S}_n,\ (x, y, z) \in E_n \times E_n \times E_n$$

Si descrivano le orbite della suddetta azione di $\mathcal{S}_n$ su $E_n \times E_n \times E_n$.