Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2021–2022

Esame scritto del 23 Settembre 2022 — 6° appello, sessione autunnale

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · ∗ · · · · · · · · ·

[1] — Si consideri il gruppo $GL_2(\mathbb{Z}_5)$ delle matrici quadrate di ordine 2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, dotato del consueto prodotto righe per colonne, e in esso il sottogruppo

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_5) \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}\, ,\, c \in Z_5 \right\}$$

(a) Calcolare la cardinalità $|G|$ del gruppo G.

(b) Determinare il numero ν_5 dei 5–sottogruppi di Sylow di G.

(c) Determinare esplicitamente un 5–sottogruppo di Sylow di G.

(d) Determinare il numero ν_2 dei 2–sottogruppi di Sylow di G.

(e) Determinare esplicitamente un 2–sottogruppo di Sylow di G.

[2] — Si consideri l'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$, sottoanello di $\mathbb{C}$.

(a) Determinare tutte le unità dell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$

(b) Dimostrare che in ciascuna delle due fattorizzazioni $25 = 5 \cdot 5$ e $25 = \big(1 + 2\sqrt{-6}\,\big) \cdot \big(1 - 2\sqrt{-6}\,\big)$ di 25 nell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$, tutti i fattori sono irriducibili.

(c) Dimostrare che le due fattorizzazioni considerate al punto *(b)* sono non equivalenti, nel senso che non si possono ottenere i fattori nell'una dai fattori nell'altra moltiplicandoli per una unità dell'anello $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-6}\,\big]$.

[3] — Sia A un dominio a ideali principali, e sia $a \in A \setminus \{0\}$.

Dimostrare che l'anello quoziente $A \big/ (a)$ ha soltanto un numero finito di ideali.

[4] — Si consideri l'estensione di $\mathbb{Q}$ data da $\mathbb{F} := \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,, \sqrt{-6}\,\big)$.

(a) Determinare il grado dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$.

(b) Determinare una base di $\mathbb{F}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare un elemento $\alpha \in \mathbb{F}$ tale che $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(d) Determinare esplicitamente un elemento $\delta \in \mathbb{F}$ tale che $\delta^2 + 3 = 0$.