

Esame scritto del 7 Settembre 2022 — Sessione autunnale, 1° appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Dato un campo $\mathbb{F}$, si consideri il gruppo $G := GL_2(\mathbb{F})$ delle matrici quadrate di ordine 2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{F}$, cioè

$$G := GL_2(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{F}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

con l'operazione di prodotto righe per colonne, e in esso il sottogruppo

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}) \middle| c = 0 \right\}$$

(a) Dimostrare che il sottoinsieme $D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K \middle| b = 0 \right\}$ è un sottogruppo di K .

(b) Dimostrare che il sottogruppo D di cui al punto (b) non è normale.

(c) Dimostrare che esiste in K un sottogruppo normale U isomorfo al gruppo additivo $(\mathbb{F}; +)$.

(d) Dimostrare che $K \cong D \rtimes_{\phi} U$, cioè K è isomorfo al prodotto semi-diretto di D per U mediante un opportuno morfismo $\phi : D \longrightarrow \text{Aut}_G(U)$.

[2] — Sia G un gruppo di ordine $|G| = 231$. Si dimostri che:

(a) esiste in G un sottogruppo *normale* N di ordine $|N| = 77$;

(b) esiste in G un elemento σ di ordine $\omega(\sigma) = 77$;

(c) esiste un morfismo *suriettivo* da G a $\mathbb{Z}_3$.

[3] — Detto $\mathbb{F} := \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ il campo degli interi modulo 7, si consideri nell'anello $\mathbb{F}[x]$ i due polinomi

$$h(x) := (x-2)^2(x+3)(x+2) \quad , \quad k(x) := (x^2-2)(x-5)^2$$

Sia $J := (h(x), k(x))$ l'ideale di $\mathbb{F}[x]$ generato dai due polinomi $h(x)$ e $k(x)$, e sia $A := \mathbb{F}[x]/J$ il relativo anello quoziente.

(a) Determinare tutti gli ideali dell'anello A .

(b) Calcolare la cardinalità di A .

(c) Determinare se l'elemento $\alpha := \overline{x-1}$ in A sia un elemento invertibile oppure no; in caso negativo, si motivi adeguatamente la risposta, in caso affermativo si determini esplicitamente l'elemento inverso $\alpha^{-1} \in A$.

[4] — Sia $\omega \in \mathbb{C}$ una radice primitiva 9^{a} dell'unità.

(a) Determinare il polinomio minimo di ω su $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\omega)$.

(c) Determinare — esprimendoli esplicitamente come combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di potenze di ω — opportuni elementi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\omega)$ tali che $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ e $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$.