Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2021–2022

Esame scritto del 6 Luglio 2022 — Sessione estiva, 2$^{\text{o}}$ appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] — Dato un campo $\mathbb{E}$, si considerino il polinomio $p(x) := x^4 + 1 \in \mathbb{E}[x]$ e il suo campo di spezzamento su $\mathbb{E}$, indicato con $\mathbb{K}_{p(x)}$.

In ciascuno dei due casi $\mathbb{E} := \mathbb{Q}$ e $\mathbb{E} := \mathbb{Z}_5$, si determini esplicitamente:

(a) il grado $\big[\mathbb{K}_{p(x)} : \mathbb{E}\big]$ dell'estensione di campi $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}_{p(x)}$;

(b) il gruppo di Galois dell'estensione di campi $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}_{p(x)}$.

[2] — Sia G un gruppo il cui ordine sia $|G| = 2013$. Si dimostri che:

(a) esiste in G uno e un solo sottogruppo H con le seguenti proprietà:

(a.1) $H \trianglelefteq G$; *(a.2)* $|H| = 11$;

(a.3) $H \subseteq Z(G)$, dove $Z(G)$ è il centro del gruppo G;

(b) esiste in G uno e un solo sottogruppo Q con le seguenti proprietà:

(b.1) $Q \trianglelefteq G$; *(b.2)* $|Q| = 61$.

[3] — Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $\mathbb{K}_0$ il suo sottocampo fondamentale, e supponiamo che $\big|\mathbb{K}\big| = 32$.

(a) Determinare il numero esatto di campi $\mathbb{F}$ tali che $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$.

(b) Si consideri il polinomio $f(x) := \big(x^{32} - x\big) \in \mathbb{K}_0[x]$, e sia $q(x)$ un fattore irriducibile di $f(x)$ in $\mathbb{K}_0[x]$ tale che $q(x) \neq x$ e $q(x) \neq x - 1$.

Dimostrare che allora si ha $\partial\big(q(x)\big) = 5$.

[4] — Si consideri il gruppo $G := GL_2(\mathbb{Q})$ delle matrici quadrate di ordine 2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{Q}$, cioè

$$G \ := \ GL_2(\mathbb{Q}) \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Q}\,,\ a\,d - b\,c \neq 0 \right\}$$

rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne, e si consideri in esso il sottogrupppo

$$K \ := \ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) \,\middle|\, c = 0 \right\}$$

(a) Si dimostri che il sottoinsieme

$$D \ := \ \left\{ \kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K \,\middle|\, b = 0 \right\}$$

è un sottogruppo di K;

(b) Si dimostri che il gruppo K contiene un sottogruppo normale N che è isomorfo al gruppo additivo $(\,\mathbb{Q}\,;\,+\,)$;

(c) Si dimostri che $K \cong D \ltimes_\phi N$, cioè (a meno di isomorfismi) K è prodotto semidiretto di D per N;

(d) Si descriva esplicitamente il morfismo $\phi : D \longrightarrow Aut_{\mathcal{G}}(U)$ che interviene nella definizione del prodotto semidiretto di cui al punto *(c)*.

[5] — Sia $\mathbb{Z}[\,i\,]$ l'anello degli interi di Gauss, e in esso si consideri il sottoinsieme

$$I \ := \ \big\{\, (u - 2\,v) + i\,(2\,u + v) \,\big|\, u, v \in \mathbb{Z} \,\big\}$$

(a) Si dimostri che I è un ideale dell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$.

(b) Si determini esplicitamente un generatore dell'ideale I.

(c) Si determini se l'anello quoziente $\mathbb{Z}[\,i\,]\big/I$ sia un campo oppure no.