

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2021–2022

Esame scritto del 13 Giugno 2022 — Sessione estiva, 1° appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Nell’anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri il sottoinsieme

$$J := \{ (x - 2y) + i(2x + y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \}$$

(a) Dimostrare che J è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Determinare un generatore esplicito dell’ideale J .

(c) Determinare se l’anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/J$ sia un campo oppure no.

[2] — Sia $\mathbb{F}$ un campo di cardinalità $|\mathbb{F}| = 32$, e sia $\mathbb{F}_0$ il suo sotto-campo fondamentale.

(a) Determinare il numero di estensioni intermedie tra $\mathbb{F}_0$ e $\mathbb{F}$.

(b) Detto $f(x) \in \mathbb{F}_0[x]$ un fattore irriducibile del polinomio $(x^{32} - x) \in \mathbb{F}_0[x]$, dimostrare che si ha necessariamente

$$f(x) = x, \quad \text{oppure} \quad f(x) = x - 1, \quad \text{oppure} \quad \partial(f(x)) = 5.$$

[3] — Sia $\mathbb{F}$ un campo, $p(x) := x^4 + 1 \in \mathbb{F}[x]$, e sia $\mathbb{K}_{p(x)}$ il campo di spezzamento del polinomio $p(x)$ su $\mathbb{F}$.

Per ciascuno dei due casi $\mathbb{F} := \mathbb{Q}$ e $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_5$, determinare:

(a) il grado $[\mathbb{K}_{p(x)} : \mathbb{F}]$ dell’estensione di campi $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}_{p(x)}$;

(b) il gruppo di Galois dell’estensione di campi $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}_{p(x)}$.

[4] — Sia G un gruppo di ordine $|G| = 2013$. Dimostrare che:

- (a) Esiste in G uno e un solo sottogruppo U tale che
 - (a.1) U ha ordine 11;
 - (a.2) U è normale (come sottogruppo di G);
 - (a.3) U è contenuto nel centro $Z(G)$ del gruppo G .
- (b) Esiste in G uno e un solo sottogruppo K tale che
 - (b.1) K ha ordine 61;
 - (b.2) K è normale (come sottogruppo di G).

[5] — Sia $G := GL_2(\mathbb{Q})$ il gruppo delle matrici quadrate di ordine 2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{Q}$, cioè

$$G := GL_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

con il consueto prodotto righe per colonne, e si consideri in esso il sottogruppo

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) \mid c = 0 \right\}$$

(a) Dimostrare che il sottoinsieme

$$D := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b = 0 \right\}$$

è un sottogruppo di Γ ;

(b) Dimostrare che esiste in Γ un sottogruppo normale N isomorfo al gruppo $(\mathbb{Q}; +)$;

(c) Dimostrare che $\Gamma \cong D \rtimes_{\phi} N$, cioè Γ è prodotto semidiretto di D per N ;

(d) Descrivere esplicitamente il morfismo $\phi : D \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}}(N)$ utilizzato nel prodotto semidiretto di cui al punto (c).