Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2021–2022

Esame scritto del 15 Febbraio 2022 / Sessione Estiva Anticipata, 2° appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... * ....

[**1**] — Dimostrare che l'anello quoziente

$$\mathbb{Z}[x\,,y\,,t]\Big/\big(x\,t+1\,,\,t-x\big)$$

è un dominio a fattorizzazione unica, e calcolarne il gruppo delle unità.

2 — Sia G un gruppo di ordine 105.

(a) Dimostrare che esiste in G un sottogruppo normale non banale.

(b) Dimostrare che esiste in G un sottogruppo normale di ordine 7.

[**3**] — Considerato il gruppo abeliano $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_{70} \times \mathbb{Z}_{20}$, si determinino:

(a) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 1^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (="fattorizzazione *per invarianti*");

(b) la fattorizzazione di G come prodotto di gruppi ciclici determinata dal 2^{o} Teorema di Classificazione dei Gruppi Abeliani Finiti (="fattorizzazione *per sottogruppi di Sylow*").

[4] — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauss, si fattorizzi in irriducibili il numero $A := 260 - 130\,i$.

[5] — Si consideri il dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ e in esso l'insieme

$$\mathcal{T} \;:=\; \Big\{\, \zeta \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] \;\Big|\; N(\zeta) = 9 \,\Big\}$$

dove N è la norma in $\mathbb{C}$, che per ogni $\zeta = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ vale ovviamente $N(\zeta) = N\big(a + b\sqrt{-5}\,\big) = a^2 + 5\,b^2$. Dimostrare che:

(a) $\mathcal{T} = \Big\{ +3\,,\, -3\,,\, \big(+2+\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(+2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2+\sqrt{-5}\,\big) \Big\}$;

(b) ogni elemento di $\mathcal{T}$ è irriducibile ma *non* è primo;

(c) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è un dominio atomico (= dominio a fattorizzazione);

(d) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio a fattorizzazione unica;

(e) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio di Bézout;

(f) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio con M.C.D.

[6] — Si consideri l'anello quoziente

$$\mathbb{K} \;:=\; \mathbb{Q}[x]\Big/\big(x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 3\big)$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{K}$ è un campo.

(b) Posto $\alpha := \overline{x} \in \mathbb{K}$, calcolare $(1-\alpha)^{-1}$ esprimendolo come combinazione lineare di 1, α e α^2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$.