Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2021–2022

Esame scritto del 28 Gennaio 2022 / Sessione Estiva Anticipata, 1° appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · * · · · · · · · · ·

[1] — Si consideri l'anello quoziente

$$A \ := \ \mathbb{Z}[x\,,y]\Big/\big(x\,y-1\,,\,y+7\,,\,x-5\big)$$

(a) Dimostrare che A è un anello finito.

(b) Dimostrare che A non è un campo.

(c) Determinare se esista in A l'inverso di ciascuno dei due elementi $\overline{2\,x\,y+3\,x-12}$ e $\overline{8\,y-x\,y+13}$; in caso negativo si spieghi perché tale inverso non esista, in caso positivo si calcoli esplicitamente tale inverso.

2 — Sia G un gruppo di ordine 280.

(a) Dimostrare che esiste in G un sottogruppo normale N non banale.

(b) Supponendo che esista in G un 2–sottogruppo di Sylow *normale*, si determini:

(b.1) il numero dei sottogruppi di G di ordine 5;

(b.2) il numero degli elementi di G di ordine 7.

[3] — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ si calcoli $\mathrm{MCD}\big(4-3\,i\,,\,1+2\,i\big)$ e un'identità di Bézout per esso.

[4] — Nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ si fattorizzi in irriducibili il polinomio

$$f(x) \;:=\; 15\,x^4 + 55\,x^3 - 50\,x - 20$$

[5] — Dimostrare che $\alpha := 1 + \sqrt[3]{2}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, e calcolarne il polinomio minimo.

[6] — Sia $\mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi, e sia $\mathbb{K} := \mathbb{F}_5(\alpha)$ un'estensione semplice di $\mathbb{F}_5$ generata da un elemento α tale che $\alpha^4 \,=\, 2\,\alpha + 1$.

(a) Determinare il grado $\big[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5\big]$.

(b) Determinare il numero di campi $\mathbb{E}$ tali che $\mathbb{F}_5 \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}$.

(c) Determinare quante radici abbia in $\mathbb{K}$ il polinomio

$$f(x) \;:=\; x^2 + x + 2$$