Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2019–2020

Esame scritto del 23 Settembre 2020 — Sessione Autunnale, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Sia A l'anello prodotto diretto $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) Dimostrare che A è anello a ideali principali.

(b) Determinare tutti gli ideali primi di A .

(c) Determinare tutti gli ideali massimali di A .

[2] — Sia $\mathbb{K} := \mathbb{Q}_{(x^2-5)(x^3-7)}$ il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $\big(x^2-5\big)\big(x^3-7\big)$ in $\mathbb{Q}[x]$.

(a) Determinare il grado $\big[\,\mathbb{K}:\mathbb{Q}\,\big]$ dell'estensione di campi $\mathbb{K}\big/\mathbb{Q}$.

(b) Determinare il numero di sottogruppi normali nel gruppo $Gal\big(\mathbb{K}/\mathbb{Q}\big)$.

(c) Determinare esplicitamente tutte le estensioni $\mathbb{F}$ intermedie tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}$ tali che l'estensione $\mathbb{F}\big/\mathbb{Q}$ sia normale.

[3] — Sia G un gruppo di ordine 385, il quale contenga un sottogruppo H di ordine 77.

(a) Dimostrare che H è l'unico sottogruppo in G di ordine 77.

(b) Dimostrare che esistono in G due sottogruppi K_1 e K_2 che sono ***caratteristici*** e tali che $\{e_G\} \subsetneqq K_1 \subsetneqq K_2 \subsetneqq G$.

[4] — Sia dato il polinomio $f(x) := x^2 + 7x + 13$ in $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Dimostrare che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Determinare se l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[x] \big/ \big(f(x)\big)$ sia un dominio, o un campo, o nessuno dei due.

[5] — *(a)* Nel gruppo simmetrico $\mathcal{S}_8$, determinare il numero di elementi σ tali che $\sigma^2 = \big(5\,,2\big)\big(3\,,6\big)$.

(b) Sia p un primo, G un p-gruppo finito, N un sottogruppo normale non banale di G, e

$$N^G \;:=\; \big\{\, n \in N \,\big|\, g\,n\,g^{-1} = n \;\; \forall\, g \in G \,\big\}$$

l'insieme dei punti di N fissati dall'azione di coniugazione di G ristretta ad N. Dimostrare che $\big|N^G\big| \geq p$.