Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2019–2020

Esame scritto del 7 Settembre 2020 — Sessione Autunnale, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · $\ast$ · · · · · · · · ·

[1] — Sia $G := GL_n(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in $\mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Sia poi $S := SL_n(\mathbb{R})$ il sottoinsieme di G delle matrici con determinante pari a 1, e sia $\Sigma := \mathbb{R}^\star \cdot I_n = \big\{ r\, I_n \,\big|\, r \in \mathbb{R}^\star := \mathbb{R} \setminus \{0\} \big\}$ — dove I_n è la matrice identità di taglia n — l'insieme delle matrici *scalari* invertibili.

Dimostrare che:

(a) S e Σ sono sottogruppi di G;

(b) G è prodotto diretto (interno) $S \times \Sigma \iff n$ è dispari.

[2] — Sia A un anello commutativo e unitario, e sia $A[x]$ l'anello dei polinomi in una variabile x a coefficienti in A.

Dimostrare che, se $A[x]$ è un dominio a ideali principali, allora A è un campo.

[3] — *(a)* Calcolare il numero di anagrammi della parola "PAPPARDELLE".

(b) Considerando l'azione naturale — data dal prodotto di matrici per vettori colonna — del gruppo lineare generale $GL_2(\mathbb{C})$ sull'insieme $\mathbb{C}^2$, descrivere esplicitamente lo stabilizzatore del punto $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^2$.

[4] — *(a)* Costruire esplicitamente un campo $\mathbb{F}_{16}$ che contenga esattamente 16 elementi, e determinare esplicitamente un generatore del gruppo moltiplicativo $\mathbb{F}_{16} \setminus \{0\}$.

(b) Costruire esplicitamente un campo $\mathbb{F}_{27}$ che contenga esattamente 27 elementi, e determinare esplicitamente un elemento che generi il gruppo moltiplicativo $\mathbb{F}_{27} \setminus \{0\}$.

(c) Indicando con $\mathbb{F}_q$ un arbitrario campo finito di cardinalità q, dimostrare che i due gruppi di Galois $\mathit{Gal}\big(\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2\big)$ e $\mathit{Gal}\big(\mathbb{F}_{27}/\mathbb{F}_3\big)$ non sono isomorfi l'uno all'altro.

[5] — Dimostrare che il polinomio

$$p(x) \;:=\; \frac{2}{15}\,x^5 + \frac{4}{5}\,x^4 - x^3 + \frac{6}{5}\,x^2 - 3\,x + \frac{1}{5}$$

in $\mathbb{Q}[x]$ è irriducibile.