

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2019–2020

Esame scritto del 15 Luglio 2020 — Sessione Estiva, II appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in *corsivo* con grafia leggibile.

..... *

[1] — Siano $e \in \mathbb{N}_+$ e p un numero primo.

Determinare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani Γ di ordine p^e che abbiano la seguente proprietà:

(★) — per ogni coppia di sottogruppi $H, K \leq \Gamma$, se $|H| = |K|$ allora $H \cong K$.

In altre parole, due qualsiasi sottogruppi di Γ che abbiano la stessa cardinalità sono necessariamente isomorfi.

[2] — Sia A un anello commutativo e unitario, e sia $A[x]$ l'anello dei polinomi in x a coefficienti in A . Dato un ideale I in A , sia

$$I[x] := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in A[x] \mid a_k \in I, \forall k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

l'insieme dei polinomi in $A[x]$ i cui coefficienti appartengano tutti a I .

(a) Dimostrare che $I[x] \trianglelefteq A[x]$, cioè $I[x]$ è un ideale di $A[x]$.

(b) Dimostrare che $I[x]$ è esattamente l'ideale di $A[x]$ generato da I (identificato al sottoinsieme di $A[x]$ dei *polinomi costanti* per una qualsiasi costante appartenente a I).

(c) Dimostrare che se I è *primo* (come ideale) in A , allora $I[x]$ è *primo* (come ideale) in $A[x]$.

(d) Dimostrare che se I è *massimale* (come ideale) in A , allora $I[x]$ *non* è *necessariamente massimale* (come ideale) in $A[x]$, fornendo un esempio esplicito di un anello A e un ideale massimale I in A per cui l'ideale $I[x]$ in $A[x]$ *non* sia massimale.

[3] — Sia $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ l'insieme

$$R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{ a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$$

dotato delle operazioni

$$\begin{aligned}(a' + b'\sqrt{-3}) + (a'' + b''\sqrt{-3}) &:= (a' + a'') + (b' + b'')\sqrt{-3} \\ (a' + b'\sqrt{-3}) \cdot (a'' + b''\sqrt{-3}) &:= (a'a'' - 3b'b'') + (a'b'' + b'a'')\sqrt{-3}\end{aligned}$$

rispetto alle quali è un anello commutativo e unitario.

(a) Dimostrare che l'anello R è un dominio.

(b) Dimostrare che l'anello R è un dominio a fattorizzazione (o “dominio atomico”).

(c) Determinare se l'anello R sia un dominio a fattorizzazione unica: in caso affermativo, si dimostri il perché; in caso negativo, si determini esplicitamente un elemento (non nullo e non invertibile) in R che sia *irriducibile e non primo*.

[4] — Sia $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{3}, i)$ il sottocampo di $\mathbb{C}$ generato su $\mathbb{Q}$ da $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{3}$ e $i := \sqrt{-1}$.

(a) Calcolare il grado $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ dell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{K}$ è il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $h(x) := (x^3 - 7)(x^2 - 3)$ come anche di $k(x) := (x^3 - 7)(x^2 + 1)$.

(c) Dimostrare che il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ non è abeliano.

[5] — Sia G un gruppo di ordine 441.

(a) Dimostrare che G si scompone come prodotto semidiretto (eventualmente diretto) di due suoi sottogruppi entrambi non banali.

(b) Dimostrare che G è risolubile.