Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2019–2020

Esame scritto del 16 Giugno 2020 — Sessione Estiva, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· $*$ ·········

[1] — Sia $\mathbb{Z}_5$, l'anello degli interi modulo 5, e sia $\mathbb{Z}_5(\gamma)$ un campo estensione di Z_5 generato da un elemento γ tale che $\gamma^4 - \gamma + 4 = 0$.

(a) Dimostrare che il grado dell'estensione $\mathbb{Z}_5(\gamma)$ di $\mathbb{Z}_5$ è 4 .

(b) Descrivere esplicitamente — precisandone l'effetto sugli elementi di $\mathbb{Z}_5$ e sul generatore γ — un automorfismo non banale del campo $\mathbb{Z}_5(\gamma)$ come estensione di $\mathbb{Z}_5$.

(c) Determinare il numero totale di campi $\mathbb{F}$ intermedi tra $\mathbb{Z}_5$ e $\mathbb{Z}_5(\gamma)$, cioè tali che $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{Z}_5(\gamma)$.

[2] — Sia $\mathbb{Z}[u,v]$ l'anello dei polinomi in due variabili u e v a coefficienti interi, e sia R l'anello quoziente $\mathbb{Z}[u,v] \Big/ \big(2\,u^2 + u\,v + 3\,v - 8\,,\, u + v - 3 \big)$.

(a) Dimostrare che l'anello R *non* è un campo.

(b) Dimostrare che l'anello R è un dominio euclideo.

(c) Relativamente alla struttura di anello euclideo individuata al punto *(b)*, calcolare esplicitamente il quoziente e il resto nella divisione dell'elemento $a := \overline{1 - u^2 + 2\,v - u}$ per l'elemento $b := \overline{u^2 + u\,v + v}$.

[3] — Sia G un gruppo di ordine 675 .

(a) Dimostrare che esiste sempre una decomposizione di G in prodotto semidiretto in cui i due fattori siano non banali.

(b) Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché G sia risolubile.

(c) Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché G sia abeliano.

(d) Nel caso in cui G sia abeliano, determinare quale possa essere la sua struttura ciclica secondo il *1^0 Teorema di Classificazione* e il *2^0 Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

[4] — Sia $\omega := 7 - \left(\sqrt[3]{5}\,\right)^2 \in \mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che ω è algebrico su $\mathbb{Q}$, e determinare il suo polinomio minimo (sul campo $\mathbb{Q}$).

(b) Determinare la minima estensione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, indicata con $\mathbb{Q}^\omega$, che contenga ω e che sia normale su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare se esista un campo $\mathbb{K}$ tale che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{Q}^\omega$ con $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ estensione normale di grado 3.