

Esame scritto del 4 Febbraio 2020 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Sia $\mathbb{Z}[i]$ l’anello degli interi di Gauss, $\mathbb{Q}[i]$ il suo campo dei quozienti, $(\mathbb{Z}[i])[x]$ e $(\mathbb{Q}[i])[x]$ i corrispondenti anelli dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{Z}[i]$ e in $\mathbb{Q}[i]$ rispettivamente. Consideriamo poi gli anelli quoziente

$$A := (\mathbb{Z}[i])[x] / ((2-i)x^2 + (5-5i)x + (2+i))$$

$$K := (\mathbb{Q}[i])[x] / ((2-i)x^2 + (5-5i)x + (2+i))$$

$$R := \mathbb{Z}[x, y] / (x^2y + xy^2 - 2x^2 + 5xy - 4x - y - 2, y^2 + 1)$$

- (a) Dimostrare che l’anello A è un dominio.
- (b) Dimostrare che l’anello K è un campo.
- (c) Dimostrare che gli anelli A e R sono tra loro isomorfi.

[2] — Si classifichino tutte le classi di isomorfismo dei gruppi di ordine 847, e per ciascuna classe si determini esplicitamente un gruppo appartenente alla classe stessa.

[3] — Dato un anello unitario A , con $1 \neq 0$, consideriamo i suoi sottoinsiemi

$$U(A) := \{ \alpha \in A \mid \exists \alpha' \in A : \alpha \alpha' = 1 = \alpha' \alpha \}$$

$$Z(A) := \{ z \in A \mid za = az \ \forall a \in A \}$$

$$D(A) := \{ d \in A \mid \exists \delta \in A \setminus \{0\} : d\delta = 0 \text{ oppure } \delta d = 0 \}$$

e il suo gruppo degli automorfismi (come anello unitario), indicato con $\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A; +, \cdot)$. Dato un gruppo G e un morfismo di gruppi $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{A}}(A; +, \cdot)$, si consideri l’azione di G su A indotta da ρ , data da $g.a := (\rho(g))(a)$ per ogni $g \in G$ ed ogni $a \in A$.

- (a) Dimostrare che $U(A)$ è una unione di G -orbite.
- (b) Dimostrare che $Z(A)$ è una unione di G -orbite.
- (c) Dimostrare che $D(A)$ è una unione di G -orbite.
- (d) Dimostrare che una G -orbita in $U(A)$ e una in $D(A)$ sono sempre disgiunte.

[4] — Determinare il numero di tutti gli anagrammi della parola AMMOLLALO.

[5] — Sia $\mathbb{Z}_5$ l'anello degli interi modulo 5, sia $\mathbb{Z}_5[x]$ il corrispondente anello dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, e sia $\mathbb{F}$ l'anello quoziente

$$\mathbb{F} := \mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + 3x - 2)$$

- (a) Dimostrare che $\mathbb{F}$ è un campo, e calcolarne la cardinalità.
 - (b) Per ciascun valore di $\omega \in \{4, 5, 8, 25, 62\}$, determinare se esista in $U(\mathbb{F})$ un elemento di ordine (moltiplicativo) ω .
 - (c) Descrivere esplicitamente il gruppo di Galois dell'estensione di campi $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{F}$.
 - (d) Determinare esplicitamente tutte le estensioni intermedie di $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{F}$, cioè tutti i campi $\mathbb{K}$ tali che $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$.
-
-