ALGEBRA 2 — 2007/2008

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva anticipata — prova scritta dell'11 Febbraio 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente*, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo* in corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Siano G_{21} e G_{20} due gruppi di ordine rispettivamente $\big|G_{21}\big| = 21$ e $\big|G_{20}\big| = 20$, e sia $\mathbb{Z}_{25}$ il gruppo degli interi modulo 25 (rispetto all'operazione di addizione tra classi resto).

(a) Determinare tutti i possibili omomorfismi (di gruppo) $\varphi : G_{21} \longrightarrow G_{20}$, precisando quali di essi — eventualmente — siano monomorfismi, epimorfismi o isomorfismi.

(b) Dimostrare che un qualunque gruppo del tipo $G_{21} \ltimes \mathbb{Z}_{25}$, cioè prodotto semidiretto di G_{21} per il gruppo $\big(\mathbb{Z}_{25}\,;\,+\big)$ degli interi modulo 25, è necessariamente un prodotto *diretto*.

[2] — Si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]\Big/\big(30\big)$.

(a) Determinare tutti gli ideali di A .

(b) Per ciascuno dei due elementi $a := \overline{3+i}$ e $b := \overline{3+2i}$ nell'anello A , determinare se sia invertibile (in A). In caso negativo, si giustifichi la risposta; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente l'inverso dell'elemento in esame.

[3] — Calcolare il campo di spezzamento $\mathbb{Q}_f$ sul campo $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) := x^3 - x^2 + 4\,x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

In particolare, si determinino:

(a) il grado $\big[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}\big]$ dell'estensione $\mathbb{Q}_f \big/ \mathbb{Q}$;

(b) una base di $\mathbb{Q}_f$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$;

(c) un elemento primitivo dell'estensione $\mathbb{Q}_f \big/ \mathbb{Q}$.

[4] — Sia G un gruppo, siano S ed S' due G–insiemi, e si consideri un'applicazione

$$\varphi \colon S \longrightarrow S' \quad \text{tale che} \quad \varphi(g.s) = g.\varphi(s) \qquad \forall\; g \in G\,,\; s \in S\,.$$

Indicando con $\mathcal{O}_x$ e con St_x rispettivamente l'orbita e lo stabilizzatore di un elemento x (in un G–insieme), dimostrare che:

(a) $\qquad St_{\varphi(s)} \supseteq St_s \qquad$ per ogni $s \in S$;

(b) $\qquad \varphi\big(\mathcal{O}_s\big) = \mathcal{O}_{\varphi(s)} \qquad$ per ogni $s \in S$.