PROVA SCRITTA DI ALGEBRA

6 Giugno 2006

1) Sia G il gruppo abeliano additivo costituito da tutte le funzioni continue da $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$. Si consideri il sottogruppo

$$N = \{f \in G \mid f(1/3) = 0\}$$

Si studi il quoziente G/N , dicendo a quale gruppo noto esso è isomorfo.

2) Si dica se il polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ è riducibile o irriducibile in $\mathbb{Z}_3$. Si elenchino gli elementi di $\mathbb{Z}_3(\alpha)$ dove α è tale che $\alpha^2 + 1 = 0$ e si scriva la tavola dell'addizione e della moltiplicazione di tale campo.

3) Sia $\mathbb{Q}$ il campo razionale e sia $\mathbb{Q}(\alpha)$ l'estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ mediante una radice del polinomio irriducibile $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Si determini l'inverso, se esiste, dell'elemento $1 - \alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$ scrivendolo nella forma $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.