

Esame scritto del 26 Febbraio 2019 — Sessione Estiva Anticipata, II appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Sia A un insieme, e siano ρ_1 e ρ_2 due relazioni in A .

(a) Se ρ_1 e ρ_2 sono equivalenze, dimostrare che $\rho_1 \circ \rho_2$ è un'equivalenza se e soltanto se $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

(b) Se $*$ è un'operazione in A e le relazioni ρ_1 e ρ_2 sono compatibili con $*$, dimostrare che $\rho_1 \circ \rho_2$ è compatibile con $*$;

(c) Se A è un anello, ρ_1 e ρ_2 sono equivalenze compatibili con le operazioni in A , e I_{ρ_1} e I_{ρ_2} sono gli ideali (bilateri) di A ad esse associati, dimostrare che $\rho_1 \circ \rho_2$ è un'equivalenza compatibile con le operazioni di A e che l'ideale di A associato a $\rho_1 \circ \rho_2$ è l'ideale somma $I_{\rho_1} + I_{\rho_2} := \{i_1 + i_2 \mid i_1 \in I_{\rho_1}, i_2 \in I_{\rho_2}\}$.

[2] — Calcolare tutte le soluzioni del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast : \begin{cases} 64x \equiv 16 \pmod{28} \\ -15x \equiv 37 \pmod{11} \\ 227x \equiv 22 \pmod{15} \end{cases}$$

[3] — Sia p un numero primo, sia $G := \text{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$ il gruppo generale lineare delle matrici 3×3 invertibili a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$, con l'operazione di prodotto righe per colonne, e sia

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Dimostrare che:

(a) U è sottogruppo di $\text{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$;

(b) il gruppo U non è commutativo;

(c) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \binom{n}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) ogni elemento di U diverso dall'identità ha ordine p .

[4] — Sia G un gruppo, $H \leq G$ e $K \leq G$ due sottogruppi di G , sia $\mu : H \times K \longrightarrow G$ l'applicazione $(h, k) \mapsto \mu(h, k) := h k$ (cioè la restrizione a $H \times K$ dell'operazione di G), e sia $H K := \{ h k \mid h \in H, k \in K \}$. Nell'insieme $H \times K$ consideriamo la struttura standard di prodotto diretto di gruppi.

Dimostrare che:

- (a) μ è iniettiva $\iff H \cap K = \{1_G\}$;
- (b) μ è suriettiva $\iff H K = G$;
- (c) μ è un morfismo $\iff h k = k h \quad \forall h \in H, k \in K$;
- (d) μ è un isomorfismo $\iff H \cap K = \{1_G\}, H K = G, H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G$;

[5] — Sia A un anello commutativo unitario, sia $d \in A$ un elemento idempotente — cioè tale che $d^2 = d$ — e siano $I_d := \{ \alpha \in A \mid \alpha d = 0 \}$ e $J_d := (d) = \{ a d \mid a \in A \}$. Dimostrare che:

- (a) I_d e J_d sono ideali di A ;
- (b) esiste $u_d \in I_d$ che è elemento neutro per il prodotto in I_d ;
- (c) esiste $v_d \in J_d$ che è elemento neutro per il prodotto in J_d ;
- (d) $I_d \cap J_d = \{0\}$;
- (e) $I_d + J_d = A$;
- (f) esiste un isomorfismo dall'anello prodotto diretto $I_d \times J_d$ all'anello A che manda l'elemento $(u_d, v_d) \in I_d \times J_d$ nell'elemento $1 \in A$.

[6] — Si consideri l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

- (a) Dimostrare che $1 + 2i$ e 7 sono irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$.
- (b) Determinare una fattorizzazione in irriducibili — in $\mathbb{Z}[i]$ — per l'intero di Gauss $N := 780 - 260i$.
- (c) Determinare un generatore dell'ideale $I := (7 - 6i, 3 + i)$ in $\mathbb{Z}[i]$ generato da $7 - 6i$ e $3 + i$.