CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 24 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] — Nell'insieme $\mathbb{Z}^\times := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione η definita da

$$a \,\eta\, b \iff \exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; a\,b = n^2 \qquad \forall\; a\,, b \in \mathbb{Z}^\times$$

(a) Dimostrare che η è una relazione di equivalenza.

(b) Descrivere esplicitamente le classi di η–equivalenza $[1]_\eta\,,\ [5]_\eta\,,\ [-6]_\eta\,,\ [6]_\eta\,,\ [45]_\eta\,,$ in funzione della fattorizzazione di ciascun intero non nullo in potenze di primi distinti.

[2] — Determinare tutti i possibili valori di $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfino simultaneamente le seguenti tre condizioni:

$$137\,x \equiv -54 \pmod{11}\ , \qquad -\overline{103}\,\overline{x} = \overline{47} \text{ in } \mathbb{Z}_9\ , \qquad \exists\; y \in \mathbb{Z} \;:\; 83\,x + 15\,y = 503$$

[3] — Sia A un anello commutativo unitario, e $U(A)$ il gruppo dei suoi elementi invertibili (rispetto alla moltiplicazione). Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathit{Aff}(A) := \left\{ Y_{a,b} \,\middle|\, a \in U(A)\,, b \in A \right\} \qquad \left(\subseteq A^A \right)$$

di applicazioni da A in sé stesso definite da $Y_{a,b}(x) := a\,x + b$ (per ogni $x \in A$) per ogni $(a,b) \in U(A) \times A$. Indichiamo poi con $\mathcal{S}(A)$ l'insieme di tutte le permutazioni di A in sé stesso. Dimostrare che:

(a) $\mathit{Aff}(A) \subseteq \mathcal{S}(A)$ — cioè ogni $Y_{a,b}$ è una permutazione;

(b) $\mathit{Aff}(A)$ è un sottogruppo del gruppo $\left(\mathcal{S}(A)\,;\circ\right)$;

(c) il sottoinsieme $O(A) := \left\{ Y_{a,0} \,\middle|\, a \in U(A) \right\}$ è un sottogruppo di $\left(\mathit{Aff}(A)\,;\circ\right)$;

(d) il sottoinsieme $T(A) := \left\{ Y_{1,b} \,\middle|\, b \in A \right\}$ è un sottogruppo normale di $\left(\mathit{Aff}(A)\,;\circ\right)$;

(e) la funzione $O(A) \times T(A) \longrightarrow \mathit{Aff}(A)$ data da $\left(Y_{a,0}\,, Y_{1,b}\right) \mapsto Y_{a,0} \circ Y_{1,b}$ è biiettiva.

[4] — Sia A un anello commutativo unitario, e sia $M_2(A)$ l'anello delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in A. Per ogni $\alpha \in A$, consideriamo il sottoinsieme

$$M_2^{(\alpha)}(A) := \left\{ \begin{pmatrix} u+v & u \\ \alpha\, u & v \end{pmatrix} \in M_2(A) \,\middle|\, u\,,v \in A \right\} \qquad \Big(\subseteq M_2(A) \Big)$$

Dimostrare che:

(a) $M_2^{(\alpha)}(A)$ è un sottoanello dell'anello $M_2(A)$;

(b) il (sotto)anello $M_2^{(\alpha)}(A)$ è commutativo;

(c) in generale — cioè tranne che per casi banali — il (sotto)anello $M_2^{(\alpha)}(A)$ non è un ideale (bilatero) dell'anello $M_2(A)$.

[5] — Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ i due polinomi

$$p(x) := x^4 - 1 \quad , \qquad q(x) := x^4 - 3\,x^3 + 3\,x - 1$$

(a) Determinare il $\text{M.C.D.}\big(\,p(x)\,,q(x)\big)$.

(b) Determinare il $\text{m.c.m.}\big(\,p(x)\,,q(x)\big)$.

(c) Determinare una identità di Bézout esplicita per $\text{M.C.D.}\big(\,p(x)\,,q(x)\big)$.