

CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023-2024

Esame scritto del 26 Febbraio 2025 — V appello, Sessione Invernale

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Determinare esplicitamente l'insieme di tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di equazioni congruenziali lineari

$$\begin{cases} 451x \equiv -93 & (\text{mod } 5) \\ -59x \equiv 6138^{930415} & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

[2] — Considerati due insiemi X e Y , indichiamo con Y^X l'insieme di tutte le funzioni da X ad Y , e con $\mathcal{S}(Y)$ l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme Y in sé stesso. Consideriamo poi la relazione $\rightleftharpoons$ in Y^X data da

$$f \rightleftharpoons \ell \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}(Y) : \sigma \circ f = \ell \quad (\forall f, \ell \in Y^X)$$

Dimostrare che:

(a) la relazione $\rightleftharpoons$ è una equivalenza;

(b) per ogni $f, \ell \in B^A$ si ha $f \rightleftharpoons \ell \implies |f(A)| = |\ell(A)|$.

[3] — Sia G un gruppo ciclico finito avente ordine 20, in cui fissiamo uno specifico generatore indicato con g .

(a) Determinare esplicitamente tutti i generatori di G , descritti in funzione del generatore originario g .

(b) Determinare se in G esistano o meno elementi di ordine 4, oppure 5, oppure 8, oppure 10, oppure 15. In caso negativo, spiegare perché un tale elemento non esista; in caso affermativo, specificare esplicitamente un elemento che abbia tale ordine.

(c) Determinare se il gruppo G sia isomorfo oppure no al gruppo $(U(\mathbb{Z}_{25}); \cdot)$ degli elementi invertibili dell'anello unitario $(\mathbb{Z}_{25}; +, \cdot)$.

(continua...) $\implies$

[4] — Dato un insieme E , si consideri il gruppo $\mathcal{S}(E)$ di tutte le permutazioni dell'insieme E in sé stesso (rispetto al prodotto di composizione tra permutazioni). Per ogni sottoinsieme F dell'insieme E , si considerino i due sottoinsiemi di $\mathcal{S}(E)$ definiti da

$$\mathcal{S}_F(E) := \{ \sigma \in \mathcal{S}(E) \mid \sigma(F) = F \} , \quad \mathcal{S}_{(F)}(E) := \{ \sigma \in \mathcal{S}(E) \mid \sigma(f) = f, \forall f \in F \}$$

Dimostrare che:

- (a) $\mathcal{S}_F(E)$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(E)$.
- (b) $\mathcal{S}_{(F)}(E)$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(E)$.
- (c) $\mathcal{S}_{(F)}(E)$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{S}_F(E)$.
- (d) Il gruppo $\mathcal{S}_F(E) / \mathcal{S}_{(F)}(E)$ è isomorfo al gruppo di permutazioni $\mathcal{S}(F)$.

[5] — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{J} := \{ i(-5x + y) - 2(2x - y) \mid x, y \in \mathbb{Z}[i] \}$$

- (a) Dimostrare che il sottoinsieme $\mathcal{J}$ è un ideale dell'anello $\mathbb{Z}[i]$.
- (b) Determinare esplicitamente un generatore dell'ideale $\mathcal{J}$.
- (c) Determinare se l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i] / I$ sia un campo oppure no.
- (d) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i] / \mathcal{J}$.

[6] — Si considerino un anello A e un insieme X , e il corrispondente insieme A^X di tutte le funzioni da X ad A , dotato della sua struttura naturale di anello (indotta da A , con le operazioni definite punto per punto). Per ogni sottoinsieme Y in X , definiamo

$$A_Y^X := \{ \phi \in A^X \mid \phi(y) = 0 \forall y \in Y \}$$

- (a) Dimostrare che il sottoinsieme A_Y^X è un ideale (bilatero) dell'anello A^X .
- (b) Dimostrare che il quoziente A^X / A_Y^X è isomorfo all'anello di funzioni A^Y .