

Esame scritto del 5 Febbraio 2025 — Sessione Invernale, V appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Dati due insiemi A e B , sia B^A l'insieme di tutte le funzioni da A a B e sia $\mathcal{S}(B)$ l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme B in sé stesso. Consideriamo poi la relazione $\approx$ in B^A data da

$$h \approx k \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}(B) : \sigma \circ h = k \quad (\forall h, k \in B^A)$$

Dimostrare che:

- (a) la relazione $\approx$ è una equivalenza;
- (b) per ogni $h, k \in B^A$ si ha $h \approx k \implies |h(A)| = |k(A)|$.

[2] — Determinare esplicitamente l'insieme di tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di equazioni congruenziali lineari

$$\begin{cases} 476x \equiv -83 & (\text{mod } 5) \\ -31x \equiv 6278^{930127} & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

[3] — Dato un insieme E , sia $\mathcal{S}(E)$ l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme E in sé stesso. Per ogni sottoinsieme F dell'insieme E , si considerino i due sottoinsiemi di $\mathcal{S}(E)$ definiti da

$$\mathcal{S}_F(E) := \{ \sigma \in \mathcal{S}(E) \mid \sigma(F) = F \} \quad , \quad \mathcal{S}_{(F)}(E) := \{ \sigma \in \mathcal{S}(E) \mid \sigma(f) = f \quad \forall f \in F \}$$

Dimostrare che:

- (a) $\mathcal{S}_F(E)$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(E)$.
- (b) $\mathcal{S}_{(F)}(E)$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(E)$.
- (c) $\mathcal{S}_{(F)}(E)$ è un sottogruppo normale di $\mathcal{S}_F(E)$.
- (d) Il gruppo $\mathcal{S}_F(E) / \mathcal{S}_{(F)}(E)$ è isomorfo al gruppo di permutazioni $\mathcal{S}(E \setminus F)$.

(continua...) $\implies$

[4] — Sia G un gruppo ciclico finito avente ordine 54, in cui fissiamo uno specifico generatore indicato con g .

(a) Determinare esplicitamente tutti i generatori di G , descritti in funzione del generatore originario g .

(b) Determinare se in G esistano o meno elementi di ordine 9, oppure 13, oppure 18; in caso affermativo, specificare esplicitamente un elemento che abbia tale ordine.

(c) Determinare se il gruppo G sia isomorfo oppure no al gruppo $(U(\mathbb{Z}_{81}); \cdot)$ degli elementi invertibili dell'anello unitario $(\mathbb{Z}_{81}; +, \cdot)$.

[5] — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si consideri il sottoinsieme

$$I := \{ (r - 5s) + 2i(2s - r) \mid r, s \in \mathbb{Z}[i] \}$$

(a) Dimostrare che il sottoinsieme I è un ideale dell'anello $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Determinare esplicitamente un generatore dell'ideale I .

(c) Determinare se l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$ sia un campo oppure no.

(d) Determinare la cardinalità dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$.

[6] — Si considerino un anello A e un insieme X , e il corrispondente insieme A^X di tutte le funzioni da X ad A , dotato della sua struttura naturale di anello (indotta da A , con le operazioni definite punto per punto). Per ogni sottoinsieme Y in X , definiamo

$$A_Y^X := \{ f \in A^X \mid f(y) = 0 \ \forall y \in Y \}$$

(a) Dimostrare che A_Y^X è un ideale (bilatero) dell'anello A^X .

(b) Dimostrare che il quoziente A^X/A_Y^X è isomorfo all'anello di funzioni A^Y .