CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023-2024

Esame scritto del 23 Settembre 2024 — Sessione Autunnale, IV appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Sia E un insieme, e siano η_1, η_2 due equivalenze in E .
Dimostrare che per le relazioni $\eta_1 \cap \eta_2$ e $\eta_1 \cup \eta_2$ si ha:

- (a) $\eta_1 \cap \eta_2$ è una equivalenza;
- (b) $\eta_1 \cup \eta_2$ è riflessiva e simmetrica;
- (c) $\eta_1 \cup \eta_2$ è transitiva $\iff \exists e, e', e'' \in E : e \eta_1 e', e \not\eta_2 e', e' \eta_1 e'', e' \eta_2 e''$.

[2] — Sia ρ la relazione in $\mathbb{Z}$ definita da

$$a \rho b \iff 3a^2 - b + 1 \equiv_5 4a - 9 - 2b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

- (a) Dimostrare che ρ è un'equivalenza (in $\mathbb{Z}$).
- (b) Calcolare esplicitamente la classe di ρ -equivalenza di 5, di -3 , di 0.
- (c) Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, calcolare esplicitamente la classe di ρ -equivalenza di z .

[3] — Sia $Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ il gruppo dei quaternioni, nel quale l'operazione è data da

$$\begin{aligned} (\pm i)^2 = -1, \quad (\pm j)^2 = -1, \quad (\pm k)^2 = -1 \\ ij := k, \quad jk := i, \quad ki := j, \quad ji := -k, \quad kj := -i, \quad ik := -j \end{aligned}$$

l'elemento $1 := +1$ è elemento neutro di G , e valgono le consuete regole dei segni.

- (a) Sia $H \leq Q$ un sottogruppo. Dimostrare che $-1 \notin H$ se e soltanto se $H = \{1\}$.
- (b) Sia G un gruppo, con elemento neutro e , e sia $\phi : Q \rightarrow G$ un morfismo di gruppi. Dimostrare che

$$\phi \text{ è iniettivo} \iff \phi(-1) \neq e$$

(continua...) $\implies$

[4] — Sia G un gruppo *commutativo*, e sia F il sottoinsieme di tutti gli elementi di G aventi ordine finito.

(a) Dimostrare che F è un sottogruppo di G .

(b) Dimostrare che nel gruppo quoziente G/F l'unico elemento di ordine finito è il l'elemento neutro.

[5] — Sia $\mathbb{K}$ un campo, precisamente $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5\}$, e si considerino in $\mathbb{K}[x]$ i due polinomi

$$h(x) := 3x^2 - 5x - 2 \quad , \quad k(x) := 3x^3 - 2x^2 - 4x - 1$$

(a) Calcolare esplicitamente $\text{MCD}(h(x), k(x))$.

(b) Determinare esplicitamente una *identità di Bézout* per $\text{MCD}(h(x), k(x))$

[6] — Sia A un anello euclideo, sia $v : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ la sua funzione valutazione, sia $v_0 := \min(\{v(a) \mid a \in A \setminus \{0\}\})$, sia $1 := 1_A$ l'elemento unità di A , e sia $U(A)$ il sottoinsieme degli elementi invertibili in A . Dimostrare che:

(a) $v(1) = v_0$;

(b) per ogni $\alpha \in A \setminus \{0\}$ si ha $\alpha \in U(A) \iff v(\alpha) = v_0$.