

CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023-2024

Esame scritto del 3 Settembre 2024 — Sessione Autunnale, III appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Dimostrare che $\binom{\ell+t}{2} = \binom{\ell}{2} + \ell t + \binom{t}{2}$ per ogni $\ell, t \in \mathbb{N}_+$.

[2] — Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione tra insiemi, e sia ω una relazione in B , e sia ω_f la relazione in A definita da $a' \omega_f a'' \stackrel{\Delta}{\iff} f(a') \omega f(a'')$, per ogni $a', a'' \in A$. Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni tra proprietà di ω e proprietà di ω_f :

- (a) se ω è riflessiva (in B), allora anche ω_f è riflessiva (in A);
- (b) se ω è transitiva (in B), allora anche ω_f è transitiva (in A);
- (c) se ω è simmetrica (in B), allora anche ω_f è simmetrica (in A);
- (d) se ω è antisimmetrica (in B) e f è iniettiva, allora ω_f è antisimmetrica (in A).

[3] — Sia G un gruppo *ciclico* di ordine 18.

- (a) Determinare esplicitamente tutti i generatori di G .
- (b) Determinare se nel gruppo G esistano o meno elementi di ordine 8, oppure 6, oppure 4, oppure 3; in caso affermativo, determinare un elemento che abbia tale ordine.
- (c) Determinare se il gruppo G sia isomorfo oppure no al gruppo $(U(\mathbb{Z}_{54}); \cdot)$ degli elementi invertibili nell'anello unitario $(\mathbb{Z}_{54}; +, \cdot)$.

[4] — Sia G un gruppo, e sia Q il sottogruppo di G generato da tutti i *quadrati* in G , cioè $Q := \langle \{g^2 \mid g \in G\} \rangle$.

- (a) Dimostrare che il sottogruppo Q è *normale* in G .
- (b) Determinare l'ordine di un qualunque elemento non banale — cioè diverso dall'elemento neutro — nel gruppo quoziente G/Q .

(continua...) $\implies$

[5] — Sia p un numero primo in $\mathbb{Z}_+$. Nell'insieme

$$\mathbb{Z}_p[j] := \{ a + j b \mid a, b \in \mathbb{Z}_p \}$$

si considerino le operazioni $+$ e $\cdot$ definite da

$$\begin{aligned} (a' + j b') + (a'' + j b'') &:= (a' + a'') + j (b' + b'') \\ (a' + j b') \cdot (a'' + j b'') &:= (a' a'' + b' b'') + j (a' b'' + b' a'') \end{aligned}$$

rispetto alle quali $\mathbb{Z}_p[j]$ è un anello unitario.

- (a) Dimostrare che $\mathbb{Z}_p[j]$ è isomorfo all'anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^2 - 1)$.
- (b) Descrivere esplicitamente il gruppo $U(\mathbb{Z}_p[j])$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_p[j]$.

[6] — Si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]/(30)$. Per ciascuno dei due elementi $a := \overline{3+i}$ e $b := \overline{3+2i}$ nell'anello A , determinare se sia invertibile (in A). In caso negativo, si giustifichi la risposta; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente l'inverso dell'elemento in esame.
