CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 17 Luglio 2024 — Sessione Estiva, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

········· $*$ ·········

[1] — Dati due insiemi A e B, si indichi B^A l'insieme delle funzioni da A a B. Sia poi "$\sim$" l'usuale relazione di equipotenza tra insiemi, e siano infine X, Y, Z tre insiemi arbitrari.

(a) Dimostrare che $\big(X \times Y\big)^Z \sim X^Z \times Y^Z$.

(b) Dimostrare che se $X \sim Y$, allora si ha anche $X^Z \sim Y^Z$.

[2] — Sia E un insieme non vuoto, e sia $\rho : E \dashrightarrow E$ una relazione qualsiasi in E. Si definiscano iterativamente le *potenze* di ρ come le relazioni

$$\rho^1 := \rho \quad , \qquad \rho^{n+1} := \rho \circ \rho^n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_+$$

Allora:

(a) Se ρ è transitiva, dimostrare che $\rho^n \subseteq \rho^k$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}_+$ con $n \geq k$.

(b) Se ρ è transitiva e riflessiva, dimostrare che $\rho^n = \rho^k$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}_+ : n \geq k$.

(c) Per l'insieme $E := \mathbb{Z}$, fornire un esempio di una relazione ρ che sia transitiva ma non riflessiva e tale che $\rho^2 \subsetneqq \rho$.

[3] — Sia G un gruppo *privo di torsione*, cioè tale che valga la seguente proprietà: per ogni $g \in G$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, si ha $g^n = 1_G \iff g = 1_G$.

(a) Se $g \in G \setminus \{1_G\}$ è tale che $g^r = g^s$ per qualche $r, s \in \mathbb{Z}$, dimostrare che allora è $r = s$;

(b) Se G è *commutativo* e $g, \gamma \in G$ sono tali che $g^n = \gamma^n$ per un certo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dimostrare che allora è $g = \gamma$;

(c) Dare un esempio di un gruppo commutativo G privo di torsione, di due elementi $g, \gamma \in G$ con $g \neq \gamma$ e di due interi positivi $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $g^n = \gamma^m$.

(continua...) $\Longrightarrow$

[4] — Sia G un gruppo, siano $H \leqslant G$, $K \leqslant G$, e siano G/H e G/K i corrispondenti spazi di classi laterali sinistre (modulo H e modulo K , rispettivamente).

(a) Dimostrare che esiste una funzione iniettiva $G\big/(H \cap K) \hookrightarrow \big(G/H\big) \times \big(G/K\big)$.

(b) Dimostrare che se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, allora è anche $(H \cap K) \trianglelefteq G$.

(c) Dimostrare che se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, allora si può trovare una funzione come in *(a)* che è un morfismo di gruppi, dove $\big(G/H\big) \times \big(G/K\big)$ ha la struttura canonica di prodotto diretto di gruppi.

(d) Dimostrare che se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, e i gruppi quoziente G/H e G/K sono abeliani, allora anche il gruppo quoziente $G\big/(H \cap K)$ è abeliano.

[5] — Sia S un insieme di irriducibili in $\mathbb{Z}$, con $S \subseteq \mathbb{Z}_+$, e per tale S definiamo $\mathbb{Z}_S := \big\{\, n/d \in \mathbb{Q} \,\big|\, \text{i fattori irriducibili di } d \text{ appartengono a } S \,\big\}$. Dimostrare che:

(a) $\mathbb{Z}_S$ è sottoanello di $\mathbb{Q}$;

(b) Se S' e S'' sono due insiemi di irriducibili in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, come sopra, allora si ha

$$S' \text{ è sottoinsieme di } S'' \iff \mathbb{Z}_{S'} \text{ è sottoanello di } \mathbb{Z}_{S''} \quad ;$$

[6] — Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[\,i\,]$ si considerino i quattro elementi

$$A := 7 + 4\,i \quad , \qquad B := 3 + i \quad , \qquad C' := 1 + 3\,i \quad , \qquad C'' := 5$$

(a) Determinare se l'equazione diofantea $A\,X + B\,Y \,=\, C'$ in $\mathbb{Z}[\,i\,]$ abbia soluzioni: in caso negativo, si spieghi perché non esistano soluzioni, in caso positivo si calcoli almeno una soluzione esplicita (X, Y) .

(b) Determinare se l'equazione diofantea $A\,X + B\,Y \,=\, C''$ in $\mathbb{Z}[\,i\,]$ abbia soluzioni: in caso negativo, si spieghi perché non esistano soluzioni, in caso positivo si calcoli almeno una soluzione esplicita (X, Y) .

(c) Calcolare il $M.C.D.\big(A\,,B\big)$.