

Esame scritto del 17 Giugno 2024 — Sessione Estiva, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Si considerino l'insieme $\mathbf{V}_I := \{\text{parole della lingua italiana}\}$ e l'insieme di lettere $A := \{F, E, R, N\}$. Si consideri poi in $\mathbf{V}_I$ la relazione $\bowtie$ definita da

$$\mathcal{P}_1 \bowtie \mathcal{P}_2 \iff \begin{array}{l} \text{“ la parola } \mathcal{P}_1 \text{ contiene al più tante lettere} \\ \text{di } A \text{ quante ne contiene la parola } \mathcal{P}_2 \text{”} \end{array}$$

dove le lettere, se compaiono più di una volta, vanno contate una volta sola (dunque *senza* “molteplicità”).

- (a) Si dimostri che la relazione $\bowtie$ è una relazione di preordine in $\mathbf{V}_I$.
- (b) Si dimostri che la relazione $\bowtie := \bowtie \cap \bowtie^{-1}$ è una relazione di equivalenza in $\mathbf{V}_I$.
- (c) Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $\left| \mathbf{V}_I / \bowtie \right|$.
- (d) Descrivere esplicitamente ciascuna classe di $\bowtie$ -equivalenza in $\mathbf{V}_I$.

[2] — Dato un anello unitario A , si consideri l'anello unitario $Mat_{3 \times 3}(A)$ delle matrici 3×3 a coefficienti in A (rispetto all'ordinaria somma tra matrici e al prodotto righe per colonne) e il suo gruppo degli elementi invertibili

$$GL_3(A) := \{ M \in Mat_{3 \times 3}(A) \mid \exists M^{-1} \in Mat_{3 \times 3}(A) \}$$

Si consideri poi in $Mat_{3 \times 3}(A)$ il sottoinsieme $U_3^+(A) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in A \right\}$.

- (a) Dimostrare che $U_3^+(A)$ è sottogruppo di $GL_3(A)$.
- (b) Calcolare esplicitamente il centro di $U_3^+(A)$, cioè il sottoinsieme

$$Z(U_3^+(A)) := \{ \zeta \in U_3^+(A) \mid \zeta g = g \zeta \forall g \in U_3^+(A) \}$$

- (c) Dimostrare che $Z(U_3^+(A)) \trianglelefteq U_3^+(A)$.

(d) Dimostrare che il gruppo quoziente $U_3^+(A) / Z(U_3^+(A))$ è isomorfo al gruppo prodotto diretto $(A; +) \times (A; +)$.

(continua...) $\implies$

[3] — Determinare l'insieme di tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 361x \equiv -78 & (\text{mod } 5) \\ -24x \equiv 6285^{930145} & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

[4] — Siano G ed H due gruppi finiti con ordini coprimi, cioè $\text{M.C.D.}(|G|, |H|) = 1$. Determinare tutti i morfismi da G ad H e tutti i morfismi da H a G .

[5] — Dato un insieme E , per ogni anello A si consideri la struttura canonica di anello nell'insieme A^E di tutte le funzioni da E ad A . Inoltre, per ogni morfismo di anelli $\phi : A_1 \rightarrow A_2$ si consideri la funzione $\phi^{(E)} : A_1^E \rightarrow A_2^E$ data da $\phi^{(E)}(f) := \phi \circ f$ ($f \in A_1^E$). Dimostrare che:

- (a) ogni funzione $\phi^{(E)} : A_1^E \rightarrow A_2^E$ come sopra è un morfismo di anelli;
- (b) per ogni anello A si ha $\text{id}_A^{(E)} = \text{id}_{A^E}$;
- (c) per ogni sequenza di morfismi $A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3$ si ha $(\phi_2 \circ \phi_1)^{(E)} = \phi_2^{(E)} \circ \phi_1^{(E)}$;
- (d) se $\phi : A_1 \rightarrow A_2$ è un isomorfismo, allora $\phi^{(E)} : A_1^E \rightarrow A_2^E$ è un isomorfismo.

[6] — Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}] := \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : \zeta = a + b\sqrt{-13} \}$.

- (a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
- (b) Determinare se $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sia un dominio a fattorizzazione.
- (c) Determinare se $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sia un dominio a fattorizzazione unica.
- (d) Determinare se $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sia un dominio a ideali principali.
- (e) Determinare se $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sia un dominio euclideo.
- (f) Determinare se esista un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ che ammetta una fattorizzazione in elementi irriducibili che però *non* siano primi.