CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021

Esame scritto del 14 Settembre 2021 — Sessione Autunnale, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · ∗ · · · · · · · · ·

[1] — Si consideri la relazione η , nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, definita da

$$h \,\eta\, k \quad \Longleftrightarrow \quad h^2 - k^2 \,=\, 5\,(h-k) \qquad\qquad \forall \;\; h\,,k \in \mathbb{Q}$$

(a) Si dimostri che la relazione η è un'equivalenza in $\mathbb{Q}$.

(b) Si descriva esplicitamente la classe di η–equivalenza di (-1) .

(c) Si dimostri che esiste una e una sola classe di η–equivalenza in $\mathbb{Q}$ che possiede esattamente uno e un solo elemento.

(d) Si dimostri che ogni classe di η–equivalenza che sia *diversa* da quella con un solo elemento — di cui al punto *(c)* — possiede esattamente due elementi distinti.

[2] — Siano Q e R i numeri naturali che sono espressi in base 9 e in base 3 dalle rispettive scritture posizionali $Q := \big(76054\big)_9$ e $R := \big(211021222\big)_3$.

(a) Determinare la scrittura posizionale di Q in base 3 .

(b) Determinare la scrittura posizionale di R in base 9 .

[3] — Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo, $N_H^G := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Dimostrare che:

(a) N_H^G è contenuto in H ;

(b) N_H^G è un sottogruppo normale di G ;

(c) N_H^G è il massimo (rispetto alla relazione di inclusione) tra tutti i sottogruppi normali di G contenuti in H.

(continua...) $\Longrightarrow$

[4] — Sia $\mathbb{Z}_{18}$ l'anello unitario delle classi resto dei numeri interi modulo 18, e sia

$$U(\mathbb{Z}_{18}) \;:=\; \left\{ \overline{\zeta} \in \mathbb{Z}_{18} \;\middle|\; \exists\, \overline{\zeta\,'} \in \mathbb{Z}_{18} \,:\, \overline{\zeta} \cdot \overline{\zeta\,'} = \overline{1} \right\}$$

il gruppo dei suoi elementi invertibili. Sia

$$\lambda : U(\mathbb{Z}_{18}) \times \mathbb{Z}_{18} \longrightarrow \mathbb{Z}_{18} \,, \quad \big(\overline{\zeta}\,,\overline{z}\big) \mapsto \lambda\big(\overline{\zeta}\,,\overline{z}\big) := \overline{\zeta} \cdot \overline{z} \qquad \forall\, \big(\overline{\zeta}\,,\overline{z}\big) \in U(\mathbb{Z}_{18}) \times \mathbb{Z}_{18}$$

l'azione del gruppo $\big(U(\mathbb{Z}_{18})\,;\,\cdot\big)$ sull'insieme $\mathbb{Z}_{18}$, e per ogni $\overline{\zeta} \in U(\mathbb{Z}_{18})$ si indichi con $\lambda_{\overline{\zeta}}$ l'applicazione di $\mathbb{Z}_{18}$ in sé stesso data da $\lambda_{\overline{\zeta}}(\,\overline{z}\,) := \lambda\big(\overline{\zeta}\,,\overline{z}\big)$ — per ogni $\overline{z} \in \mathbb{Z}_{18}$ — osservando che ogni tale $\lambda_{\overline{\zeta}}$ è un *automorfismo* del gruppo $\big(\mathbb{Z}_{18}\,;+\big)$.

(a) Descrivere esplicitamente $U(\mathbb{Z}_{18})$.

(b) Descrivere esplicitamente la permutazione $\lambda_{\overline{5}}$ dell'insieme $\mathbb{Z}_{18}$.

(c) Indicando con $\omega_+(\,\overline{z}\,)$ l'ordine di $\overline{z}$ nel gruppo additivo $\big(\mathbb{Z}\,;+\big)$, dimostrare che se $\overline{z'}$ e $\overline{z''}$ appartengono alla stessa orbita di $U(\mathbb{Z}_{18})$ in $\mathbb{Z}_{18}$ allora $\omega_+(\,\overline{z'}\,) = \omega_+(\,\overline{z''}\,)$.

(d) Descrivere esplicitamente le orbite dell'azione del gruppo $U(\mathbb{Z}_{18})$ su $\mathbb{Z}_{18}$.

[5] — Sia A un anello, e sia I un ideale bilatero di A. Siano poi

$$M_2(A) \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a\,,b\,,c\,,d \,\in A \right\} \quad , \quad \mathcal{I} \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & \beta \\ c & \delta \end{pmatrix} \;\middle|\; a\,,c \in A\,,\; \beta\,,\delta \in I \right\}$$

e consideriamo in $M_2(A)$ la struttura standard di anello, con la somma coefficiente per coefficiente e il prodotto righe per colonne.

(a) Dimostrare che $\mathcal{I}$ è un ideale sinistro dell'anello $M_2(A)$.

(b) Dimostrare che il gruppo additivo $\big(M_2(A)\big/\mathcal{I}\;;+\big)$ è isomorfo al gruppo prodotto diretto $\big(A/I\,;+\big) \times \big(A/I\,;+\big)$.