

Esame scritto del 26 Agosto 2021 — Sessione Autunnale, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$, vale l'identità

$$3 \sum_{k=2}^n k(k-1) = n(n^2-1)$$

[2] — Determinare tutti i valori di $x \in \mathbb{Z}$ per i quali si abbia simultaneamente

$$[11]_7 [x]_7 = [6703]_7^{354393} \quad \text{in } \mathbb{Z}_7 \quad \text{e} \quad [326]_5 [x]_5 = [-37]_5 \quad \text{in } \mathbb{Z}_5$$

[3] — Sia $U(\mathbb{Z}_{16})$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili nell'anello unitario $\mathbb{Z}_{16}$, e sia D_4 il gruppo diedrale su 4 elementi, che possiamo identificare al sottogruppo

$$\{id, (13), (24), (12)(34), (14)(23), (1234), (13)(24), (4321)\}$$

del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_4$ su 4 elementi. In ciascuno di questi gruppi, indichiamo con $\omega(g)$ l'ordine di un qualsiasi elemento g .

(a) Determinare l'ordine $\omega(\sigma)$ di ogni elemento $\sigma \in D_4$.

(b) Determinare l'ordine $\omega(\bar{z})$ di ogni elemento $\bar{z} \in U(\mathbb{Z}_{16})$.

(c) Determinare se i gruppi D_4 e $U(\mathbb{Z}_{16})$ siano isomorfi l'uno all'altro oppure no.

[4] — Sia G un gruppo e $H \leq G$, con $(G:H) \in \mathbb{N}_+$, cioè H è un sottogruppo di indice finito in G . Sfruttando l'azione del gruppo G sull'insieme delle parti $\mathcal{P}(G)$ indotta dall'azione di coniugazione di G su sé stesso, dimostrare che per la cardinalità dell'insieme $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ dei coniugati di H vale la maggiorazione

$$\left| \{gHg^{-1} \mid g \in G\} \right| \leq (G:H)$$

[5] — Sia A un anello. Dati I, J ideali sinistri di A , consideriamo i sottoinsiemi

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}, \quad (I : J) := \{a \in A \mid a \cdot J \subseteq I\}$$

(a) Dimostrare che $I + J$ è ideale sinistro dell'anello A .

(b) Dimostrare che $(I : J)$ è ideale (bilatero) dell'anello A .