CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021

Esame scritto del 13 Luglio 2021 — Sessione Estiva, II appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Siano $b := 10$, $b' := 5$, $b'' := 8$. Si risponda a ciascuna delle domande seguenti, giustificando adeguatamente la risposta:

- (a) $(27506)_b$ è divisibile per $(9)_b$?
- (b) $(3180452)_b$ è divisibile per $(11)_b$?
- (c) $(4301224)_{b'}$ è divisibile per $(6)_{b''}$?

[2] — Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\mathbb{Z}_n$ il gruppo additivo (con l'operazione di somma) delle classi resto modulo n , e sia $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ il gruppo *prodotto diretto* di due gruppi $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_n$ di questo tipo (per $m, n \in \mathbb{Z}$). Indichiamo con $[z]_k$ ($\in \mathbb{Z}_k$) la classe modulo k di un qualsiasi $z \in \mathbb{Z}$. Consideriamo poi l'applicazione

$$\phi : \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{36} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18} \quad , \quad ([a]_{36}, [b]_{36}) \mapsto ([a+b]_{12}, [a+b]_{18})$$

per ogni $([a]_{36}, [b]_{36}) \in \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{36}$.

- (a) Verificare che ϕ è un morfismo di gruppi.
- (b) Descrivere esplicitamente il nucleo $\text{Ker}(\phi)$ del morfismo ϕ .
- (c) Dimostrare che il nucleo $\text{Ker}(\phi)$ è isomorfo (come gruppo) al gruppo $\mathbb{Z}_{36}$.
- (d) Dimostrare che il quoziente $(\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{36}) / \text{Ker}(\phi)$ è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}_{36}$.

[3] — Si consideri in $\mathbb{N}_+$ la relazione “ $\bowtie$ ” definita da

$$h \bowtie k \iff \exists n \in \mathbb{N}_+ : h k = n^2 \quad (\forall h, k \in \mathbb{N}_+)$$

- (a) Si dimostri che la relazione $\bowtie$ è una equivalenza in $\mathbb{N}_+$.
- (b) Si descrivano esplicitamente le classi di $\bowtie$ -equivalenza $[5]_{\bowtie}$, $[6]_{\bowtie}$, $[9]_{\bowtie}$ e $[36]_{\bowtie}$.
- (c) Si dimostri che la relazione $\bowtie$ è compatibile con la moltiplicazione in $\mathbb{N}_+$.

[4] — Calcolare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione congruenziale

$$-99^{36056} x \equiv 70 \pmod{19}$$

contenute nell'intervallo $-14 \leq x \leq 32$.

[5] — Sia A un anello, e sia G un gruppo. Sia data poi un'azione di G su A — indicata come sempre con la notazione $(g, a) \mapsto g.a$ per ogni $(g, a) \in G \times A$ — tale che la rappresentazione di G su A — corrispondente a tale azione nel modo canonico — sia un *morfismo di gruppi*

$$\varphi : G \longrightarrow (\text{Aut}_{\mathcal{A}}(A; +, \cdot); \circ)$$

dal gruppo G al gruppo degli automorfismi dell'anello A . Sia poi

$$A^G := \{ \alpha \in A \mid g.\alpha = \alpha \forall g \in G \}$$

il sottoinsieme in A dei punti fissi dell'azione di G ; infine, dato un ideale (bilatero) I di A , poniamo $g.I := \{ g.y \mid y \in I \}$ per ogni $g \in G$. Dimostrare allora che

- (a) $I_G := \bigcap_{g \in G} g.I$ è un ideale (bilatero) di A ;
- (b) A^G è un sottoanello dell'anello A ;
- (c) se $|G| = 13$ e $|A| = 35$, allora $A^G = A$.