CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021

Esame scritto del 15 Giugno 2021 — Sessione Estiva, I appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] — Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, si ha

$$a_n := 7^n + 3\,n - 1 \in 9\,\mathbb{N}$$

[2] — Si consideri in $\mathbb{N}_+$ la relazione "$\diamond$" definita da

$$\ell \diamond t \iff \exists\, n \in \mathbb{N}_+ \,:\, \ell\, t = n^2 \qquad \big(\,\forall\, \ell\,, t \in \mathbb{N}_+\big)$$

(a) Dimostrare che $\diamond$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{N}_+$;

(b) descrivere esplicitamente le classi di $\diamond$–equivalenza $[3]_\diamond$, $[10]_\diamond$, $[4]_\diamond$ e $[36]_\diamond$;

(c) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$, descrivere esplicitamente la classe di $\diamond$–equivalenza $[n]_\diamond$;

(d) $\diamond$ è compatibile con la moltiplicazione in $\mathbb{N}_+$;

(e) il monoide quoziente $\Big(\mathbb{N}_+\big/\diamond\,;\,\odot\Big)$, in cui l'operazione $\odot$ tra due classi $[h\,]_\diamond$ e $[k\,]_\diamond$ è definita da $[h\,]_\diamond \odot [k\,]_\diamond := [h\,k\,]_\diamond$, è un gruppo;

(f) dimostrare che nel gruppo $\Big(\mathbb{N}_+\big/\diamond\,;\,\odot\Big)$ ogni elemento non banale ha ordine 2.

[3] — Sia A un anello, e sia G un gruppo che agisce su A per automorfismi, cioè la rappresentazione di G su A corrispondente all'azione è un morfismo

$$\varphi : G \longrightarrow \big(\,Aut_{\mathcal{A}}(A\,;\,+,\cdot\,)\,;\,\circ\big)$$

dal gruppo G al gruppo degli automorfismi dell'anello A. Sia poi

$$A^G := \big\{\, \alpha \in A \,\big|\, g.\alpha = \alpha \;\forall\, g \in G \,\big\}$$

il sottoinsieme in A dei punti fissi dell'azione di G. Inoltre, dato un ideale I di A, poniamo $g.I := \big\{\, g.y \,\big|\, y \in I \,\big\}$ per ogni $g \in G$. Dimostrare allora che

(a) A^G è un sottoanello dell'anello A;

(b) $I_G := \bigcap\limits_{g \in G} g.I$ è un ideale di A;

(c) se $\big|G\big| = 11$ e $\big|A\big| = 28$, allora $A^G = A$.

[4] — Calcolare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast \; : \; \begin{cases} 27\,x \;\equiv\; -105 \quad \big(\bmod 5\big) \\ -52\,x \;\equiv\; 14 \quad \big(\bmod 3\big) \\ 23\,x \;\equiv\; 43 \quad \big(\bmod 7\big) \end{cases}$$

[5] — Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da

$$\mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big] \;:=\; \Big\{\, a + b\sqrt{5} \;\Big|\; a,b \in \mathbb{Z} \,\Big\}$$

e si consideri la funzione

$$N \,:\, \mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big] \longrightarrow \mathbb{Z} \;\; , \quad a + b\sqrt{5} \;\mapsto\; N\big(a + b\sqrt{5}\,\big) \;:=\; a^2 - 5\,b^2$$

Dimostrare che:

(a) $\mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big]$ è un sottoanello di $\mathbb{R}$;

(b) la funzione N è un morfismo di gruppoidi da $\Big(\mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big]\,;\,\cdot\,\Big)$ a $\big(\mathbb{Z}\,;\,\cdot\,\big)$;

(c) la funzione N *non* è un morfismo di gruppoidi da $\Big(\mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big]\,;\,+\Big)$ a $\big(\mathbb{Z}\,;\,+\big)$;

(d) $\Big\{\, a + b\sqrt{5} \,\in\, \mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big] \;\Big|\; N\big(\,a + b\sqrt{5}\,\big) \in 2\,\mathbb{Z} \,\Big\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}\Big[\sqrt{5}\,\Big]$.