CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2020–2021

Esame scritto dell'1 Febbraio 2021 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· $*$ ·········

[1] — Si consideri in $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relazione " $\simeq$ " definita da

$$z' \simeq z'' \iff \exists\, n', n'' \in \mathbb{N} \; : \; 2^{n'} z' = 2^{n''} z'' \qquad \big(z', z'' \in \mathbb{Z}^* \big) \, .$$

Dimostrare che:

(a) $\simeq$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}^*$;

(b) $\simeq$ è compatibile con la moltiplicazione in $\mathbb{Z}^*$;

(c) indicando con $\odot$ l'operazione in $\mathbb{Z}^*\big/\simeq$ canonicamente indotta dalla moltiplicazione in $\mathbb{Z}^*$, il monoide quoziente $\Big(\mathbb{Z}^*\big/\simeq\, ; \odot\Big)$ è isomorfo a $\big((2\,\mathbb{Z}+1)\, ; \cdot\big)$.

[2] — Siano E, F, L tre insiemi, sia " $\sim$ " l'usuale relazione di equipotenza tra insiemi, e si indichino con $\mathcal{P}(X)$ e Y^X rispettivamente l'insieme delle parti di un qualunque insieme X e l'insieme delle funzioni da un insieme a X all'insieme Y .

(a) Dimostrare che se $E \sim F$, allora $\mathcal{P}(E) \sim \mathcal{P}(F)$.

(b) Dimostrare che $\big(E \times F \big)^L \sim E^L \times F^L$.

[3] — Determinare l'insieme di tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} -3\,x \equiv 6073^{354939} \pmod{7} \\ 276\,x \equiv -42 \pmod{5} \end{cases}$$

[4] — Sia G un gruppo, siano $H \leq G$, $K \leq G$, e siano G/H , G/K e $G\big/(H \cap K)$ i corrispondenti spazi di classi laterali sinistre (modulo H , modulo K e modulo $H \cap K$).

(a) Dimostrare che esiste una funzione iniettiva $G\big/(H \cap K) \hookrightarrow \big(G/H\big) \times \big(G/K\big)$.

(b) Dimostrare che se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, allora è anche $(H \cap K) \trianglelefteq G$.

(c) Dimostrare che se $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, e i gruppi quoziente G/H e G/K sono abeliani, allora anche il gruppo quoziente $G\big/(H \cap K)$ è abeliano.

[5] — Siano G un gruppo e E un G–spazio. A partire dall'azione di G su E, si definisca la funzione

$$\sigma_\times : G \times \big(E \times E\big) \longrightarrow \big(E \times E\big) \quad , \qquad \big(g\,,(e_+\,,e_-)\big) \mapsto \big(g.e_+\,,g.e_-\big)$$

(a) Dimostrare che $\sigma_\times$ è una azione di G su $\big(E \times E\big)$.

(b) Nel caso di $G := \mathcal{S}_n$ $(\,n \in \mathbb{N}_+\,)$ e $E := \{1\,,2\,,\dots,n\,\}$, determinare il numero di G–orbite in $\big(E \times E\big)$ per la suddetta azione.

[6] — Siano A un anello e E un insieme, e sia A^E l'insieme di tutte le funzioni da E ad A dotato della sua struttura naturale di anello (indotta da A). Definiamo poi

$$\begin{aligned} \mathit{Supp}\,(f) &:= \big\{\, e \in E \,\big|\, f(e) \neq 0_A \,\big\} \qquad \forall\ f \in A^E \\ A^E_{\mathcal{E}} &:= \big\{\, f \in A^E \,\big|\, \mathit{Supp}\,(f) \subseteq \mathcal{E} \,\big\} \qquad \forall\ \mathcal{E} \subseteq E \\ A^E_{\mathit{fin}} &:= \big\{\, f \in A^E \,\big|\, |\mathit{Supp}\,(f)| \in \mathbb{N} \,\big\} \end{aligned}$$

(a) Dimostrare che A^E_{fin} è ideale dell'anello A^E.

(b) Dimostrare che $A^E_{\mathcal{E}}$ è ideale dell'anello A^E, per ogni $\mathcal{E} \subseteq E$.

(c) Dimostrare che per ogni $\mathcal{E} \subseteq E$ esiste un isomorfismo di anelli $A^E \big/ A^E_{\mathcal{E}} \cong A^{E \setminus \mathcal{E}}$.