

CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018-2019

Esame scritto del 10 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, I appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Sia E un insieme con almeno due elementi, sia $\mathcal{P}(E)$ l'insieme delle parti di E , sia $\underline{2}^E$ l'insieme delle funzioni caratteristiche su E , e sia $\Pi_2(E)$ l'insieme di tutte le partizioni di E indicizzate da un insieme $\underline{2} := \{0, 1\}$ di due elementi, cioè partizioni del tipo $\{E_0, E_1\}$, per le quali in aggiunta si abbia $E_0 \neq E_1$.

(a) Si consideri in $\underline{2}^E$ l'operazione “ $\cdot$ ” definita da $(\eta' \cdot \eta'')(e) := \eta'(e) \cdot \eta''(e)$ per ogni $e \in E$. Determinare esplicitamente una funzione $\Psi : \underline{2}^E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ che sia invertibile e tale che $\Psi(\eta' \cdot \eta'') = \Psi(\eta') \cup \Psi(\eta'')$ per ogni $\eta', \eta'' \in \underline{2}^E$.

(b) Siano $\eta_0, \eta_1 \in \underline{2}^E$ le due funzioni caratteristiche costanti, definite rispettivamente da $\eta_0(e) := 0$ e $\eta_1(e) := 1$ per ogni $e \in E$. Determinare esplicitamente una funzione $\Omega : \underline{2}^E \setminus \{\eta_0, \eta_1\} \longrightarrow \Pi_2(E)$ che sia invertibile.

[2] — Si dimostri *utilizzando esplicitamente il Principio di Induzione Semplice*, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ vale la disuguaglianza

$$2 \cdot 3^n - 5 > 5 \cdot 2^n + 2$$

[3] — Per un qualsiasi gruppo G , consideriamo gli elementi $[g, \gamma] := g\gamma g^{-1}\gamma^{-1}$ — per ogni $g, \gamma \in G$ — e il sottogruppo da essi generato in G , indicato con

$$G' := \langle \{ [g, \gamma] := g\gamma g^{-1}\gamma^{-1} \mid g, \gamma \in G \} \rangle$$

Dimostrare che:

- (a) $G' \trianglelefteq G$, cioè G' è sottogruppo *normale* di G ;
- (b) per ogni endomorfismo $\phi \in \text{End}(G)$ del gruppo G si ha $\phi(G') \subseteq G'$;
- (c) il gruppo quoziente G/G' è abeliano.

[4] — Sia A un anello, e sia I un ideale (bilatero) di A . Dimostrare che l'anello quoziente A/I è commutativo se e solo se si ha $(a'a'' - a''a') \in I$ per ogni $a', a'' \in A$.

[5] — Sia D un dominio euclideo, sia $d \in D$ un elemento *irriducibile* in D , e sia (d) l'ideale principale di D generato dall'elemento d .

Dimostrare che l'anello quoziente $D/(d)$ è un campo.

((*Suggerimento:* si pensi al caso $D = \mathbb{Z} \dots$))

[6] — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, sia $I := (1-3i, 5+i)$ l'ideale generato dai due elementi $1-3i$ e $5+i$.

(a) Determinare esplicitamente un generatore d dell'ideale I .

(b) Per il generatore d dell'ideale I trovato al punto (a), determinare esplicitamente elementi $r, s \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $d = r(1-3i) + s(5+i)$.
