

CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 9 Luglio 2019 — Sessione Estiva, II appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Sia $\eta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione (binaria) in $\mathbb{Z}$ definita da

$$a \eta b \iff 2a^2 + 11b - 9 \equiv 2a - 7b^2 + 18 \pmod{9} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che la relazione η è un'equivalenza in $\mathbb{Z}$.

(b) Descrivere esplicitamente la classe di η -equivalenza $[-2]_\eta$.

[2] — Determinare tutti i valori di $z \in \mathbb{Z}$ che soddisfino simultaneamente le seguenti tre condizioni

$$\begin{aligned} [-26]_{14} \cdot [z]_{14} &= [16]_{14} && \text{in } \mathbb{Z}_{14} \\ [33]_{30} \cdot [z]_{30} &= -[57]_{30} && \text{in } \mathbb{Z}_{30} \\ [50]_{18} \cdot [z]_{18} &= [44]_{18} && \text{in } \mathbb{Z}_{18} \end{aligned}$$

[3] — Sia E un insieme, e sia $\mathcal{S}(E)$ l'insieme di tutte le permutazioni di E in sé stesso, che è un gruppo rispetto all'operazione di composizione. Dato un sottoinsieme $F (\subseteq E)$ un sottoinsieme di E , consideriamo i sottoinsiemi di $\mathcal{S}(E)$

$$G_F := \{ \gamma \in \mathcal{S}(E) \mid \gamma(F) = F \} \quad , \quad G_{(F)} := \{ \gamma \in \mathcal{S}(E) \mid \gamma(f) = f, \forall f \in F \}$$

Dimostrare che:

(a) G_F è sottogruppo di $(\mathcal{S}(E); \circ)$;

(b) $G_{(F)}$ è sottogruppo di $(\mathcal{S}(E); \circ)$;

(c) $G_{(F)}$ è sottogruppo normale di G_F ;

(d) $G_{(F)}$ è sottogruppo normale di $(\mathcal{S}(E); \circ) \iff |E \setminus F| < 2$;

(e) il gruppo quoziente $G_F / G_{(F)}$ è isomorfo al gruppo $(\mathcal{S}(F); \circ)$ di tutte le permutazioni dell'insieme F in sé stesso.

[4] — Determinare tutti i valori di $x \in \mathbb{Z}$ tali che

$$63224^{347} \cdot x \equiv -308 \pmod{21} \quad \& \quad -5 \leq x \leq +7$$

[5] — Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}] := \{a + b\sqrt{-8} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \ (\subseteq \mathbb{C})$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) Dimostrare che nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$ per ogni elemento non nullo e non invertibile esiste (almeno) una fattorizzazione come prodotto di elementi irriducibili.

(c) Dimostrare che nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$ esiste almeno un elemento non nullo e non invertibile che ha almeno due fattorizzazioni tra loro non equivalenti come prodotto di elementi irriducibili.

[6] — Dati $n, k \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\mathbb{P}_k(n)$ il numero dei sottoinsiemi con k elementi in un insieme che abbia esattamente n elementi (*N.B.*: tale numero è indipendente dalla scelta di uno specifico insieme di n elementi). Dimostrare che

$$\mathbb{P}_3(\ell + t) = \mathbb{P}_3(\ell) + \mathbb{P}_2(\ell)t + \ell\mathbb{P}_2(t) + \mathbb{P}_3(t) \quad \forall \ell, t \in \mathbb{N}.$$
