CdL in Matematica

ALGEBRA 1

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 4 Febbraio 2019 — Sessione Estiva Anticipata, I appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>sintetico</u> ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

········· ∗ ·········

[1] — Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione ρ definita da

$$a \,\rho\, b \quad \overset{\triangle}{\iff} \quad \left(a^2 - b^2\right) \in 9\,\mathbb{Z} \qquad\qquad \forall \quad a\,,b \in \mathbb{Z}$$

(a) Dimostrare che ρ è una equivalenza in $\mathbb{Z}$;

(b) dimostrare che ρ non è compatibile con la somma in $\mathbb{Z}$;

(c) descrivere esplicitamente la classe di ρ–equivalenza $[3]_\rho$;

(d) descrivere l'insieme quoziente $\mathbb{Z}\big/\rho$.

[2] — Calcolare le ultime due cifre decimali — relativamente alla scrittura posizionale in base dieci — del numero $N := 87053214^{48301}$.

[3] — Sia $G := \mathrm{GL}_2\big(\mathbb{Z}_3\big)$ il gruppo generale lineare delle matrici 2×2 invertibili a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$, con l'operazione di prodotto righe per colonne, e sia

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; c = 0 \right\} \quad , \qquad H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; c = 0\,,\ a\,d = 1 \right\}$$

Si ha allora che B è sottogruppo di $\mathrm{GL}_2\big(\mathbb{Z}_3\big)$, mentre H è sottoinsieme di B.

(a) Dimostrare che $H \trianglelefteq B$;

(b) dimostrare che H è ciclico, determinandone esplicitamente un generatore;

(c) descrivere esplicitamente il centro $Z(B)$ del gruppo B.

[4] — Sia G un gruppo, $K \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Dimostrare che

(a) $KN = NK$;

(b) $KN \leq G$;

(c) $N \trianglelefteq KN$;

(d) $\big(K \cap N\big) \trianglelefteq K$;

(e) esiste un isomorfismo tra gruppi quoziente $K \Big/ \big(K \cap N\big) \cong \big(KN\big) \Big/ N$.

[5] — Sia E un insieme, sia $\mathbb{A}_E := \mathcal{P}(E)$ il suo insieme delle parti, e sia $E_0 \in \mathbb{A}_E$. Si consideri in $\mathbb{A}_E$ la relazione η_0 definita da

$$F' \,\eta_0\, F'' \overset{\triangle}{\iff} F' \cap E_0 = F'' \cap E_0 \qquad\qquad \forall\ F', F'' \in \mathbb{A}_E$$

Dimostrare che:

(a) η_0 è un'equivalenza in $\mathbb{A}_E$;

(b) η_0 è compatibile con ciascuna delle tre operazioni $\cup$, $\cap$ e $\triangle$ in $\mathbb{A}_E$;

(c) per ogni $F \in \mathbb{A}_E$, la classe di η_0–equivalenza $[F\,]_{\eta_0}$ è sottoinsieme (di $\mathbb{A}_E$) *chiuso* per le due operazioni $\cup$ e $\cap$;

(d) per ogni $F \in \mathbb{A}_E$, la classe di η_0–equivalenza $[F\,]_{\eta_0}$ è sottoinsieme (di $\mathbb{A}_E$) *chiuso* per l'operazione $\triangle \iff [F\,]_{\eta_0} = [\,\emptyset\,]_{\eta_0}$;

(e) prendendo in $\mathbb{A}_E := \mathcal{P}(E)$ la struttura di anello con $\triangle$ come "somma" e $\cap$ come "prodotto", esiste un isomorfismo dall'anello quoziente $\mathbb{A}_E \Big/ \eta_0$ all'anello $\big(\mathcal{P}(E_0)\,;\triangle\,,\cap\big)$.

[6] — Si consideri il dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big]$ — sottoanello unitario di $\mathbb{C}$ generato da $\sqrt{-15}$ — e su di esso la funzione $v : \mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big] \longrightarrow \mathbb{N}$ che ad ogni $\zeta = a + b\sqrt{-15}$ $\big(\in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big]\big)$ associa $v(\zeta) = v\big(a + b\sqrt{-15}\,\big) = a^2 + 15\,b^2$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big]$ è un dominio a fattorizzazione (o "dominio atomico");

(b) dimostrare che *non* esiste $\zeta \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big]$ tale che $v(\zeta) = 2$ oppure $v(\zeta) = 8$;

(c) dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-15}\,\big]$ *non* è un dominio a fattorizzazione unica.