# ALGEBRA 1 — 2008/2009

*prof. Fabio Gavarini*

Sessione estiva — prova scritta del 23 Giugno 2009

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma* esauriente*, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo* in corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . . . . . . * . . . . . . . . .

**[1]** — Sia $G$ un gruppo ciclico finito di ordine 54.

*(a)* Determinare tutti i generatori di $G$ .

*(b)* Determinare se esistano o meno elementi in $G$ di ordine 9, oppure 13, oppure 18; in caso affermativo, specificare esplicitamente un elemento con tale ordine.

*(c)* stabilire — giustificando la conclusione — se il gruppo $G$ sia isomorfo oppure no al gruppo $\big(U(\mathbb{Z}_{81})\,;\,\cdot\big)$ degli elementi invertibili dell'anello $\big(\mathbb{Z}_{81}\,;\,+\,,\,\cdot\big)$ .

**[2]** — Sia $G$ un gruppo, e sia $H$ un sottogruppo di $G$ contenuto nel centro $Z(G)$ di $G$ .

*(a)* Dimostrare che $H$ è sottogruppo normale di $G$ .

*(b)* Dimostrare che, se il gruppo quoziente $G\big/H$ è ciclico, allora il gruppo $G$ è abeliano.

**[3]** — Risolvere il sistema di congruenze lineari nell'anello $\mathbb{Z}[i]$

$$\begin{cases} (5+3\,i)\,x \;\equiv\; -2 & \big(\mathrm{mod}\ (2-i)\big) \\ (3+2\,i)\,x \;\equiv\; 1-7\,i & \big(\mathrm{mod}\ (1+i)\big) \end{cases}$$

**[4]** — Si considerino due insiemi $A$ e $B$ tali che $A \cap B = \emptyset$ , e sia $C := A \cup B$ l'insieme unione dei primi due. Si considerino poi gli insiemi di applicazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C) &:= C^C \equiv \big\{ \textit{applicazioni da } C \textit{ a } C \big\} \\ \mathcal{S}(C) &:= \big\{ \textit{permutazioni di } C \textit{ in sé} \big\} \\ \mathcal{E}(A\,|\,B) &:= \big\{ f \in \mathcal{E}(C) \,\big|\, f(A) \subseteq A\,,\ f(B) \subseteq B \big\} \\ \mathcal{E}(C:A) &:= \big\{ f \in \mathcal{E}(C) \,\big|\, f(C) \subseteq A \big\} \end{aligned}$$

Osserviamo che la composizione di applicazioni dà un'operazione su $\mathcal{E}(C)$ , denotata con $\circ$ , e precisamente $\big(\mathcal{E}(C)\,;\circ\big)$ è un monoide (=gruppoide associativo unitario). Analogamente, $\big(\mathcal{S}(C)\,;\circ\big)$ è un gruppo.

*(a)* Dimostrare che $\mathcal{E}(A\,|\,B)$ è chiuso rispetto al prodotto di composizione, cioè $\mathcal{E}(A\,|\,B) \circ \mathcal{E}(A\,|\,B) \subseteq \mathcal{E}(A\,|\,B)$ .

*(b)* Dimostrare che $\mathcal{S}(C) \cap \mathcal{E}(A\,|\,B)$ è un sottogruppo di $\big(\mathcal{S}(C)\,;\circ\big)$ .

*(c)* Dimostrare che $\mathcal{E}(C:A) \circ \mathcal{E}(C) \subseteq \mathcal{E}(C:A)$ .